



**VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING**  
**18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil**  
*August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil*

## **O CONCEITO DE CAMADA LIMITE: UMA REVISÃO CRÍTICA DE LIVROS-TEXTO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR**

**Júlio César Passos, [jpassos@emc.ufsc.br](mailto:jpassos@emc.ufsc.br); <http://energetique-juliocesarpassos.blogspot.com>**

LEPTEN-Laboratórios de Engenharia de Processos de Conversão e Tecnologia de Energia - Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina - 88040-900 - Trindade, Florianópolis- SC

**Resumo:** *O objetivo neste estudo é o de revisitar o conceito de camada limite e apontar as falhas na análise dimensional que é apresentada em livros-texto de grande sucesso em nossas universidades. Tais equívocos conceituais levam os autores desses livros-texto a quebrar a unidade do conceito de camada limite, indispensável à compreensão das bases da solução por similaridade, apresentada por Blasisus. O ponto de partida é o postulado de que todo fluido real é viscoso e de que em um escoamento paralelo a uma placa plana existe uma região vizinha chamada de camada limite, de espessura bem fina. Por meio da equação da continuidade, mostra-se que a ordem de grandeza da velocidade na direção normal à placa é bem pequena comparada com a velocidade do escoamento principal. Em seguida, prosseguindo com a análise dimensional dos termos das equações de conservação da quantidade de movimento e da energia os termos viscosos são simplificados e também se determina a ordem de grandeza da espessura da camada limite.*

**Palavras-chave:** *camada limite, convecção forçada, análise dimensional, transferência de calor, ensino de engenharia*

### **1. INTRODUÇÃO**

Todos que atuam na área de educação reconhecem a importância dos livros-texto para a formação dos estudantes e futuros profissionais. Na área de engenharia não é diferente. No entanto, apesar de já termos vários programas de pós-graduação bem consolidados, no Brasil, vários deles que já oferecem programas de doutorado, ainda carecemos de profissionais do ensino de engenharia que também sejam autores de livros-texto dirigidos ao ensino de graduação. Na área de engenharia mecânica e, em particular, na de engenharia e ciências térmicas, a disciplina de transferência de calor, hoje como há quase quarenta anos, beneficia-se de livros-texto que foram traduzidos, em sua grande maioria, de livros-texto americanos testados em universidades americanas. Uma explicação para isto talvez seja a relativa juventude da universidade brasileira, com menos de noventa anos, e cujos primeiros cursos de engenharia mecânica ainda não completaram seis décadas.

A maioria dos professores com mais de vinte ou até mais de trinta anos de formados em engenharia mecânica tiveram a formação básica, na disciplina de transferência de calor, baseada nos livros-texto traduzidos para a Língua Portuguesa. Uma referência bastante conhecida foi o livro-texto Kreith (1977), traduzido por professores da Escola Politécnica, da Universidade de São Paulo, da terceira edição americana, Kreith (1973). No prefácio à primeira edição, reproduzido em Kreith (1973, 1977), é explicado que a obra representava uma ampliação das notas de aula dos cursos ministrados pelo autor em cursos de graduação e do primeiro ano da pós-graduação, como proposta de um texto básico de transmissão do calor para engenharia. O livro-texto de Kreith (1973, 1977) é dividido em doze capítulos que tratam dos assuntos seguintes: capítulo 1: introdução, onde é explicada a relação entre transmissão do calor e termodinâmica e apresentados os três modos distintos de transmissão do calor, condução, convecção e radiação; capítulos 2 e 3: onde são apresentados os modos de condução do calor em regime permanente unidimensional, e bi e tridimensional, respectivamente; capítulo 4, onde é apresentada a condução do calor em regime não-permanente; capítulo 5, que trata da radiação térmica; capítulo 6, que trata dos fundamentos da convecção; capítulo 7, sobre a convecção natural ou livre; capítulos 8 e 9 que tratam da convecção forçada, no interior de tubos e dutos, e sobre superfícies externas, respectivamente; capítulo 10, onde são apresentados os fundamentos da ebulição e da condensação; capítulo 11, onde é feita uma introdução a trocadores de calor; capítulo 12, que trata da transferência de massa e de calor. Nas edições subsequentes, foram introduzidas melhorias no texto e na apresentação dos tópicos. Um ponto alto e de grande importância na proposta de ensino-aprendizagem de transferência de calor de Kreith (1973, 1977) são os exemplos resolvidos, à medida que são apresentados os conteúdos teóricos em cada capítulo, seguidos de vários problemas propostos, em ordem crescente de dificuldade.

O conteúdo de Kreith (1973, 1977) foi, basicamente, universalizado como proposta por vários outros autores,

Holman (1976, 1983), Bejan (1984, 1994), Incropera e DeWitt (1996), com um pouco mais de aprofundamento em métodos numéricos para condução do calor, e aperfeiçoamentos e inovações resultantes da prática de cada autor no ensino e na pesquisa em transferência de calor. É interessante observar que esses autores caracterizam-se por terem grande experiência de ensino, tanto na graduação como na pós-graduação, além de serem pesquisadores e orientadores de teses na área de engenharia e ciências térmicas, de um modo geral.

Feita esta breve introdução sobre a importância dos livros-texto no processo de ensino-aprendizagem em transferência de calor, a atenção será voltada, nas seções seguintes, ao problema da camada limite laminar na convecção forçada de um escoamento paralelo a uma placa plana horizontal. Em muitos cursos de engenharia mecânica, o aluno já terá estudado a solução aproximada do problema de camada limite hidrodinâmica laminar.

O objetivo do artigo é o de apontar, de forma crítica, alguns detalhes importantes das soluções aproximadas das equações de camada limite por meio de uma análise dimensional que, apesar de ser considerada parte elementar de qualquer livro-texto de transferência de calor, vem sendo apresentada de forma displicente e errônea por livros-texto de sucesso, Incropera e DeWitt (1996), Incropera et al. (2008), Çengel (2007, 2009). O trabalho aqui apresentado, não pretende ser original mas, tão somente, registrar e alertar o leitor sobre a necessidade de se revisar outros autores, considerados referências clássicas, Schlichting (1979), Bejan (1984, 1994, 1996), Isachenko et al. (1977). A análise crítica se concentrará nos livros-texto de Incropera et al. (2008), principalmente pelo sucesso que tal obra tem alcançado no Brasil, e Çengel (2007, 2009) que também segue o mesmo enfoque de Incropera DeWitt (1998). Incropera et al. (2008), apesar de ser uma edição recentemente revisada de Incropera e DeWitt (1996) mantém as mesmas falhas no tópico sobre camada limite, conforme já apontado em Passos (2008a, 2008b). Não se pretende negar o papel importante desempenhado por bons livros-texto no ensino de engenharia como Incropera e DeWitt (1996), Incropera et al. (2008), que há anos vêm sendo adotados em diferentes universidades, no Brasil e no mundo. O autor também reconhece o hercúleo trabalho de tradução do inglês para o português desses livros-texto realizado por vários colegas e editoras.

## 2. CAMADA LIMITE

Todo fluido real é viscoso. As observações experimentais mostram que quando um fluido escoar, paralelamente a uma superfície, as partículas do fluido em contato com a superfície aderem a esta. É como se a viscosidade tivesse o efeito de uma cola. A velocidade relativa fluido-placa, na superfície ( $y=0$ ), é zero,  $u=0$ . Na Fig. 1, apresenta-se um esquema representativo do perfil de velocidade para um escoamento em regime laminar paralelo a uma placa em repouso. As partículas do fluido aderidas à superfície, em  $y=0$ , exercem sobre as demais um efeito de frenagem que diminui, à medida que  $y$  aumenta até se atingir a região II, onde a velocidade do escoamento é quase uniforme. A região em que a velocidade varia com  $y$ , na direção  $\mathbf{j}$ , ou seja, onde ocorrem gradientes de velocidade, é chamada de camada limite, região I, na Fig. 1. Na região II, externa à camada limite,  $\delta < y < \infty$ ,  $u$  praticamente não varia com  $y$ .

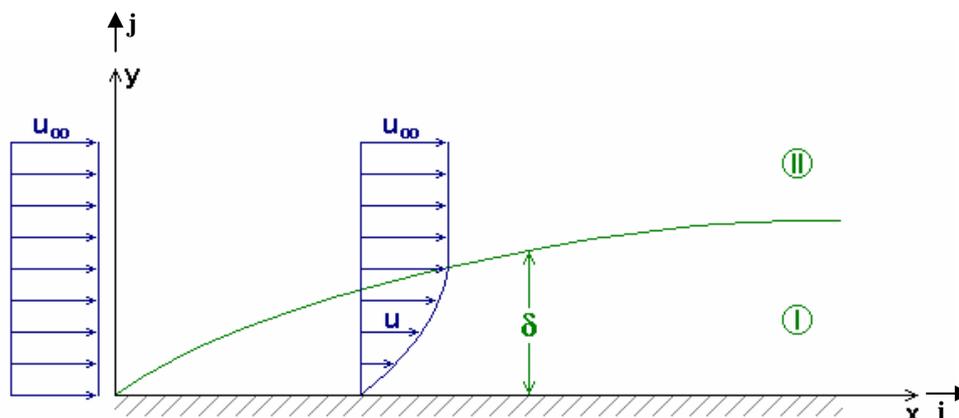


Figura 1. Esquema do perfil de velocidade sobre uma placa plana, na camada limite laminar, região I, e no seu exterior, região II.

### 2.1 Aspectos Históricos

O conceito de camada limite, introduzido por Ludwig Prandtl, em 1904, Schlichting (1979), Lienhard IV e Lienhard V (2003), Bejan (1984, 1996) permitiu conciliar duas correntes de abordagens distintas que caracterizavam os estudos na área de mecânica dos fluidos, a teórica e a experimental, cujos resultados independentes, ao final do século XIX, mostravam-se conflitantes. A via teórica era representada pela hidrodinâmica, com os trabalhos de Daniel Bernoulli (1700-1782) e Leonardo Euler (1707-1783), para fluidos invíscidos. A via experimental era representada pela hidráulica que, devido ao rápido desenvolvimento industrial e tecnológico, levou a engenharia a encontrar soluções urgentes para os problemas práticos de perda de carga em tubos e dutos ou de força de arrasto sobre corpos em movimento em um

meio fluido. A divergência entre aqueles dois ramos da ciência, onde os resultados da teoria da Hidrodinâmica não estavam de acordo com os resultados empíricos da Hidráulica, levaram Prandtl a analisar o escoamento sobre um corpo sólido, dividindo-o em duas regiões: uma região muito fina, na vizinhança do corpo, (*camada limite* ou “*boundary layer*”, em inglês), onde os efeitos viscosos são importantes, e a região “distante” ou fora da camada limite, onde os efeitos viscosos podem ser desprezados, Fig. 1.

Após a publicação de 1904, Prandtl, em co-autoria com seus orientados, ainda apresentou uma seqüência de dez artigos, um por ano. Apesar disso e da abordagem inovadora o conceito de camada limite não foi aceito de imediato pela comunidade científica. Foram necessárias quase três décadas para que este conceito viesse a ser aceito e pesquisado por um número considerável de pesquisadores, em todo o mundo, até se tornar um dos tópicos importantes da mecânica dos fluidos e da transferência de calor, Passos (2008a).

## 2.2 Análise Dimensional das Equações de Conservação na Camada Limite

Considere um fluido escoando paralelamente a uma placa plana horizontal em repouso, mantida à temperatura uniforme  $T_{sup}$ . Antes de alcançar a placa, a velocidade  $U_{\infty}$  do fluido é uniforme e a sua temperatura é  $T_{\infty}$ , conforme esquematizado, na Figura 2.

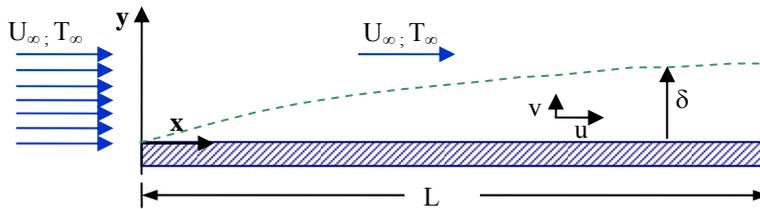


Figura 2: Escoamento de um fluido paralelamente a uma placa plana.

Na Fig. 2, a camada limite é representada pela região entre  $y=0$  e a linha pontilhada, à distância  $\delta$  da superfície da placa, com  $\delta$  variando em função de  $x$ . No caso de uma placa em repouso, a velocidade do fluido, na camada limite hidrodinâmica, região I do esquema da Figura 2, varia de  $u=0$ , em  $y=0$ , condição de aderência, até  $U_{\infty}$ , para  $\delta < y < \infty$ , para  $0 \leq x \leq L$ . No caso da camada limite térmica, o perfil de temperatura, na região I, varia de  $T=T_{sup}$ , em  $y=0$ , até  $T_{\infty}$ , longe da superfície da placa ( $\delta < y < \infty$ ). Na região II, fora da camada limite, o efeito da viscosidade é desprezível. Por uma questão de simplicidade, não será feita, na seqüência, nenhuma distinção entre as espessuras das camadas limites hidrodinâmica e térmica, embora na prática dependam das propriedades físicas do fluido.

### 2.2.1 Ordem de Grandeza da Velocidade na Direção Normal à Placa

As equações de conservação para o escoamento, em **regime laminar**, acima da superfície da placa, que inclui as regiões I e II, Fig. 1, são apresentadas, a seguir, para o **regime permanente** e para um **fluido incompressível**. Para efeito de cálculo, considera-se que a transição do regime laminar para o turbulento, em um escoamento paralelo a uma placa plana, ocorre para o número de Reynolds crítico ( $Re_{cr}$ ) de  $5 \times 10^5$ , podendo ocorrer, em função da rugosidade da superfície, no intervalo  $10^5 \leq Re_{cr} \leq 3 \times 10^6$ , Incropera et al. (2008).

Equação da continuidade, ou da conservação da massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Equações de Navier-Stokes: na direção **i**,

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

na direção **j**,

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Equação da conservação da energia:

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Na equação, acima, foram desprezados os termos de dissipação viscosa, Incropera et al. (2006). Definindo o coeficiente de difusividade térmica,  $\alpha \equiv \frac{k}{\rho \cdot c_p}$ , tem-se :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

as condições de contorno são:

$$\text{em } y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq L ; \quad u = v = 0 \text{ e } T = T_{\text{sup}} \quad (5)$$

$$\text{para } y \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow U_{\infty} \text{ e } T \rightarrow T_{\infty} \quad (6)$$

É importante considerar a possibilidade de simplificar as equações, acima, no domínio da Camada Limite,  $0 \leq y \leq \delta$ . Uma técnica bastante simples, antes de qualquer tentativa de se obter a solução matemática das Eqs. (1) a (6) é proceder a uma análise dimensional do sistema de equações de um problema a fim de verificar se existem termos preponderantes sobre outros que permitam a simplificação da solução matemática do problema.

A fim de realizar a análise dimensional, é importante considerar que a espessura da camada limite,  $\delta$ , é muito pequena comparada com o comprimento L da placa, Schlichting (1979), Lienhard IV e Lienhard V (2003), Bejan (1984, 1996)]. Esta hipótese se confirma, na prática.

$$\delta \ll L \quad (7)$$

O próximo passo é a definição das variáveis adimensionais do problema:

$$x^* \equiv \frac{x}{L} ; \quad y^* \equiv \frac{y}{\delta} ; \quad u^* \equiv \frac{u}{U_{\infty}} ; \quad v^* \equiv \frac{v}{v''} ; \quad p^* \equiv \frac{p}{\rho U_{\infty}^2} \quad (8)$$

após substituir estas variáveis, na Eq. (1), chega-se a:

$$\frac{U_{\infty}}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{v''}{\delta} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{v''}{\delta} \frac{L}{U_{\infty}} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (10)$$

Para que a equação da continuidade na forma adimensional, Eq. (10), não perca a sua generalidade, na camada limite, deve-se ter:

$$\frac{v''}{\delta} \frac{L}{U_{\infty}} = O(1)$$

onde  $O(1)$  representa a ordem de grandeza unitária, o que permite demonstrar que:

$$v'' = O\left( U_{\infty} \frac{\delta}{L} \right)$$

A fim de simplificar a notação, escreve-se:

$$v'' = U_{\infty} \frac{\delta}{L} \quad (11)$$

O resultado, na Eq. (11), indica que a escala da velocidade  $v''$ , na direção  $\mathbf{j}$ , é muito pequena comparada com a escala da velocidade, na direção  $\mathbf{i}$ , como consequência da condição  $\delta \ll L$ . Esta é uma condição importante, ditada pela conservação da massa, ou equação da continuidade, Eqs. (1) e (10).

### 2.2.2 Ordem de Grandeza da Espessura da Camada Limite

Uma vez determinada a ordem de grandeza da velocidade na direção  $\mathbf{j}$ , pode-se passar à análise dimensional das equações de conservação da quantidade de movimento. Na direção  $x$ , substituindo as variáveis adimensionais, Eqs. (8), e introduzindo a viscosidade cinemática,  $\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$ , chega-se a:

$$\frac{U_{\infty}^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \left( U_{\infty} \frac{\delta}{L} \right) \frac{U_{\infty}}{\delta} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{1}{\rho} \frac{(\rho U_{\infty}^2)}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu \left( \frac{U_{\infty}}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{U_{\infty}}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (12)$$

dividindo os termos da equação, acima, por  $\frac{U_{\infty}^2}{L}$ , chega-se a :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{U_{\infty} L} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (13)$$

onde  $\frac{\nu}{U_{\infty} L}$ , representa o inverso do número de Reynolds,  $Re_L \equiv \frac{U_{\infty} L}{\nu}$ . A ordem de grandeza dos termos de inércia e

do gradiente da pressão, após dividi-los por  $\rho$ , é  $\frac{U_{\infty}^2}{L}$ .

Como  $\frac{L^2}{\delta^2} \gg 1$ , conclui-se que:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \ll \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (14)$$

Este resultado indica que a ordem de grandeza do laplaciano da velocidade na direção  $\mathbf{i}$  é muito pequeno comparado com a ordem de grandeza do laplaciano da velocidade na direção  $\mathbf{j}$ , o que permite simplificar a Eq. (13) para:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{dp^*}{dx^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (15)$$

cujas condições de contorno são as seguintes:

$$\text{em } y^* = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq x^* \leq 1; \quad u^* = v^* = 0 \quad (16)$$

$$\text{para } y^* \rightarrow \infty, \quad u^* \rightarrow 1$$

A análise dimensional das Eqs. (2) e (3) permite que se demonstre que as ordens de grandeza dos gradientes de pressão nas direções  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ , são iguais a  $\rho \frac{U_\infty^2}{L}$  e  $\rho \frac{U_\infty^2}{L} \left( \frac{\delta}{L} \right)$ , respectivamente. Desta forma, o gradiente de pressão, na direção  $\mathbf{j}$  é muito pequeno comparado ao gradiente de pressão na direção  $\mathbf{i}$ .

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \quad (17)$$

Significa dizer que  $p=p(x)$  e, portanto, a pressão é uma constante, na direção  $\mathbf{j}$ , o que justifica a notação do gradiente de pressão na Eq. (15).

A análise da Eq. (15) permite que se estime a escala da espessura da camada limite hidrodinâmica ou comprimento característico da espessura da camada limite. A fim de que a equação, na forma adimensional, resulte a mais geral possível, o termo que multiplica a derivada segunda da velocidade em relação a  $y$  também deve ser da mesma ordem de grandeza,  $O(1)$ , dos coeficientes que multiplicam os demais termos, à esquerda do sinal de igualdade. Assim, tem-se:

$$\left( \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{L^2}{\delta^2} \right) = O(1) \quad \text{ou} \quad \frac{L}{\delta} = O\left( \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} \right)$$

ou, para simplificar a notação, conforme já apontado, acima:

$$\frac{1}{\text{Re}_L} \frac{L^2}{\delta^2} = 1, \quad \text{e} \quad \delta = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (18)$$

O resultado apresentado na Eq. (18) pode ser generalizado para qualquer  $x \gg \delta_x$ , onde  $\delta_x$  representa a espessura local da camada limite:

$$\delta_x = \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (19)$$

o termo  $\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$  representa a espessura característica da camada limite laminar, ou escala de comprimento da espessura da camada limite, à distância  $x$  do início da placa. A solução exata do problema foi obtida por Blasius, por meio de uma solução por similaridade, que obteve a seguinte expressão para a espessura local da camada limite hidrodinâmica, ver Incropera et de Witt (1994):

$$\delta_x = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (20)$$

A Eq. (19) representa um importante resultado para a solução do problema de camada limite laminar em um escoamento paralelo a uma placa plana e foi empregada por Blasius como escala para a espessura da camada limite, em sua solução por similaridade, Bejan (1984, 1996). É importante observar que, de acordo com este resultado

$$\delta_x \text{ é proporcional a } x^{0,5} \quad \text{e} \quad \delta_x \text{ é proporcional a } U_\infty^{-0,5} \quad (21)$$

### 2.2.3 Ordem de Grandeza do Coeficiente de Atrito

Uma conseqüência importante da escala de espessura da camada limite é o coeficiente de atrito,  $C_{fL}$ , definido conforme a equação, a seguir:

$$C_{fL} = \frac{\tau_{\text{sup}}}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2} \quad (22)$$

Onde a tensão superficial, na parede,  $\tau_{\text{sup}}$ , é definida através de:

$$\tau_{\text{sup}} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (23)$$

Cuja adimensionalização, é :

$$\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{U_{\infty}}{\delta} \quad (\text{aproximação à ordem de grandeza})$$

Após substituição, na Eq. (22), obtém-se:

$$C_{fL} = 2 \frac{\mu \frac{U_{\infty}}{\delta}}{\rho U_{\infty}^2} = 2 \frac{L}{\delta} \text{Re}_L^{-1}$$

Substituindo-se  $\frac{L}{\delta} = \sqrt{\text{Re}_L}$ , ver Eq. (18), chega-se a:

$$C_{fL} \propto \text{Re}_L^{-\frac{1}{2}} \quad (24)$$

#### 2.2.4 Análise Dimensional da Equação de Conservação da Energia

A análise dimensional da equação da conservação da energia, Eq. (4), pede um novo termo, a espessura da camada limite térmica,  $\delta_t$ . Para simplificar a análise, considera-se que as espessuras das camadas limites térmica e hidrodinâmica são a mesmas. Para realizar a análise dimensional, é necessário definir uma temperatura adimensional:

$$T^* = \frac{T - T_{\text{sup}}}{T_{\infty} - T_{\text{sup}}}$$

após a substituição das variáveis adimensionais, chega-se a:

$$\frac{U_{\infty}}{L} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{U_{\infty} \delta}{L} \frac{1}{\delta} v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \alpha \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (25)$$

Após a divisão dos termos da equação, acima, por  $\frac{U_{\infty}}{L}$ , chega-se a :

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \alpha \frac{1}{U_{\infty} L} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (26)$$

Como no caso da análise dimensional da equação da conservação da quantidade de movimento, também se demonstra que:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \ll \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (27)$$

Fazendo  $\alpha \frac{1}{U_\infty L} = \left(\frac{\alpha}{\nu}\right) \left(\frac{\nu}{U_\infty L}\right) = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}_L}$ , obtém-se a equação simplificada da conservação da energia para a camada limite térmica de um escoamento paralelo a uma placa, em que Pr representa o número de Prandtl.

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{L^2}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (28)$$

Em que as condições de contorno são:

$$\text{em } y^* = 0 \text{ e } 0 \leq x^* \leq 1 ; T^* = 0 \quad (29)$$

$$\text{para } y^* \rightarrow \infty, T^* \rightarrow 1$$

É interessante observar que quando se despreza o gradiente de pressão, na direção **i**, na Eq. (15), esta se torna similar à Eq. (28), fazendo Pr=1.

### 3. DISCUSSÃO

A principal falha nos resultados apresentados por Incropera e DeWitt (1996), Incropera et DeWitt (2008) e Çengel (2009) é a escolha da velocidade  $U_\infty$  e do comprimento L da placa como escalas características para as velocidades adimensionais e as distâncias, respectivamente, nas direções **i** e **j**. A escolha incorreta do comprimento de escala para adimensionalizar a distância e a velocidade, na direção **j**, impediu a Incropera et DeWitt (2008) e Çengel (2009), de obter o comprimento de escala para a espessura da camada limite, Eq. (18), e a escala para o coeficiente de atrito,  $C_{fL}$ , conforme Eq. (24). Em Incropera e DeWitt, este último resultado é, erroneamente, apresentado como sendo proporcional ao inverso do número de Reynolds,  $C_{fL} \propto \text{Re}_L^{-1}$ , embora, no capítulo 7, seja apresentado, corretamente, como proporcional ao inverso da raiz quadrada do número de Reynolds, conforme aqui demonstrado, ver Eq. (24).

Na Tabela 1, são apresentadas as equações diferenciais simplificadas para as regiões da camada limite hidrodinâmica e da camada limite térmica, em regime laminar.

Como foi dito, acima, Çengel (2009) apresenta a análise dimensional de camada limite com as mesmas falhas da apresentada por Incropera et al. (2008), sem considerar diferenças de escalas para os comprimentos nas direções **i** e **j**, o que é determinante para se demonstrar que a ordem de grandeza da velocidade na direção normal à placa é bem menor do que a velocidade  $U_\infty$ , fora da camada limite. É curioso que no livro de Mecânica dos Fluidos de Çengel e Cimbala (2006, 2007), a análise da camada limite hidrodinâmica, aqui discutida, esteja apresentada corretamente.

### 4. COMENTÁRIOS FINAIS

Foi revisitado o problema clássico da análise dimensional das equações de conservação em um escoamento laminar sobre uma placa plana. O ponto de partida é o postulado de que todo fluido real é viscoso seguido da hipótese de existência de uma região em que os gradientes de velocidade (e de temperatura) não podem ser desprezados, chamada de camada limite hidrodinâmica (camada limite térmica). Com isto, chega-se à ordem de grandeza da escala de velocidade, na direção **j**, e à ordem de grandeza da espessura da camada limite hidrodinâmica. Esta abordagem precisa permite que sejam obtidos os resultados fundamentais para o entendimento da solução de Blasius ao problema aproximado de camada limite.

Vários autores, Schlichting (1979), Ryhming, (1985), Isachenko et al. (1977), Lienhard IV e Lienhard V (2003), Bejan (1984, 1996), Darrozes e François (1982), por exemplo, apresentam análises fenomenológicas consistentes sobre a aproximação da camada limite.

Por fim, apesar do amadurecimento atingido, no Brasil, na área de ensino e pesquisa em engenharia mecânica, ainda são poucas as obras de autores brasileiros na área de engenharia e ciências térmicas. Outra constatação é o predomínio

de livros-texto, na área, traduzidos de autores americanos, o que pode restringir bastante vários outros enfoques interessantes provenientes de outras escolas de formação.

**Tabela 1. Resumo das equações diferenciais simplificadas, na forma adimensional, nas camadas limites hidrodinâmica e térmica de um escoamento laminar paralelo a uma placa plana.**

Camada limite	Equação de conservação	Condição de contorno	
		$y^*=0$	$y^* \rightarrow \infty$
<b>Hidrodinâmica</b>	$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$ <p>Neste caso, em Incropera e DeWitt (1996) e Incropera et al. (2006) falta o termo <math>\frac{L^2}{\delta^2}</math></p>	$u^*(x^*,0)=0$ $v^*(x^*,0)=0$	$u^* \rightarrow 1$
<b>Térmica</b>	$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Pr Re}_L} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$ <p>Neste caso, em Incropera e DeWitt (1996) e Incropera et al. (2006) falta o termo <math>\frac{L^2}{\delta^2}</math></p>	$T^*(x^*,0)=0$	$T^* \rightarrow 1$

### Nomenclatura

$c_p$	Calor específico	J/(kgK)
$L$	Comprimento da placa	m
$p$	Pressão	Pa
$U_\infty$	Velocidade do escoamento antes de atingir a placa	m/s
$u$	Velocidade na direção $i$	m/s
$v$	Velocidade na direção $j$	m/s
$x$	Variável, com origem no início da placa, no sentido do escoamento	m
$y$	Variável, com origem na superfície da placa, em contato com o fluido, normal à placa.	m
$\alpha$	Difusividade térmica	$\text{m}^2/\text{s}$
$\mu$	Viscosidade dinâmica	$\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$
$\nu$	Viscosidade cinemática	$\text{m}^2/\text{s}$

### Índices subscritos

$\infty$	variável longe da superfície da placa
sup	superfície da placa

### Números adimensionais

Re	Número de Reynolds	$\text{Re} = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} = \frac{U_\infty L}{\nu}$
Pr	Número de Prandtl	$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$
Pe	Número de Peclet	$\text{Pe} = \text{Pr Re}_L$

## 5. AGRADECIMENTOS

O autor agradece o apoio do CNPq.

## 6. REFERÊNCIAS

- Batchelor, G.K., 1988, "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press, New York.
- Bejan, A., 1984, "Convection Heat Transfer", John Wiley & Sons.
- Bejan, A., 1994, "Heat Transfer", John Wiley & Sons, Inc.
- Bejan, A., 1996, "Transferência de Calor", ed., Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo.
- Çengel, Y.A., 2009, "Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática", Mc Graw Hill, São Paulo.
- Çengel, Y.A., 2007, "Heat and Mass Transfer", The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Çengel, Y.A., Cimbala, J.M., 2006, Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications, The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Çengel, Y.A., Cimbala, J.M., 2007, Mecânica dos Fluidos-Fundamentos e Aplicações, Mc Graw Hill, São Paulo.
- Darroz, J.S., François, C., 1982, "Mécanique des Fluides Incompressibles", Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin.
- Holman, J.P., 1976, "Heat Transfer", 4<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
- Holman, J.P., 1983, "Transferência de Calor", McGraw-Hill, São Paulo.
- Incropera, F.P., De Witt, D. P., 1996, "Introduction to Heat Transfer", 3rd ed., John Wiley & Sons.
- Incropera, F.P., De Witt, D. P., Bergman, T.L., Lavine, A.S., 2008, "Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa", LTC, tradução da 6<sup>a</sup> ed., Rio de Janeiro.
- Isachenko, V.P., Osipova, V.A. and Sukomel, A.S., 1977, Heat Transfer, Mir Publishers, Moscow.
- Kreith, F., 1973, "Principles of Heat Transfer", 3rd ed., In text Educational Publishers, New York.
- Kreith, F., 1977, "Princípios da Transmissão de Calor", Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo.
- Lienhard IV, J.H. and Lienhard V, J.H., 2003, "A Heat Transfer Textbook", web.mit.edu/lienhard/www/ahtt.html.
- Özisik, M.N., 1977, "Basic Heat Transfer", McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
- Passos, J.C., 2008a, NT-1: Nota técnica sobre camada limite, in [www.leten.ufsc.br](http://www.leten.ufsc.br), energetique-julioesarpassos.blogspot.com.
- Passos, J.C., 2008b, NT-2: Nota técnica sobre camada limite, in [www.leten.ufsc.br](http://www.leten.ufsc.br), energetique-julioesarpassos.blogspot.com.
- Ryhmung, I.L., 1985, "Dynamique des Fluides », Presses Polytechniques Romandes, Lausanne.
- Schlichting, H., 1979, "Boundary-Layer Theory", McGraw-Hill.

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no presente trabalho.

# THE CONCEPT OF BOUNDARY LAYER: A CRITICAL REVIEW OF TEXTBOOKS ON HEAT TRANSFER

**Júlio César Passos, [jpassos@emc.ufsc.br](mailto:jpassos@emc.ufsc.br); <http://energetique-julioesarpassos.blogspot.com>**

LEPTEN-Laboratórios de Engenharia de Processos de Conversão e Tecnologia de Energia - Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina - 88040-900 - Trindade, Florianópolis- SC

**Abstract:** *The objective of this study is to revisit the concept of boundary layer and show the deficiencies in the dimensionless analysis presented in the textbooks commonly used in our universities. These conceptual mistakes lead to a break in the unity of this concept and adversely affect the obtainment of important results which serve as the fundamentals of the theoretical analysis of similarity presented by Blasius. The starting point of this analysis is to postulate that in reality all fluids are viscous and in flows parallel to a plate there is a thin layer in which the effect of viscosity is important, this region being called the boundary layer. By applying the continuity equation, the order of magnitude of the velocity in the direction normal to the plate is demonstrably very small compared to the main velocity of the flow. Applying the dimensionless form of the momentum equation, the order of magnitude of the boundary layer thickness can be obtained, along with simplifications of the viscous terms in the momentum equation and in the energy equation.*

**Keywords:** *boundary layer, forced convection, dimensional analysis, heat transfer, engineering education*

## 8. RESPONSIBILITY NOTICE

The author is the only responsible for the printed material included in this paper.