

OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DE ESTRUTURAS

Renato de Siqueira Motta, renatodesiqueira@hotmail.com¹

Silvana Maria Bastos Afonso, smb@ufpe.br¹

Paulo Roberto Maciel Lyra, prmlyra@ufpe.br²

¹ Departamento de Engenharia Civil, ² Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco, Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n – Cid. Universitária
Recife - Brasil. CEP: 50740-530.

Resumo: *A abordagem tradicional de otimização na engenharia, na maioria das aplicações, considera modelos e parâmetros determinísticos. Infelizmente a abordagem determinística pode levar a soluções cujo desempenho pode cair significativamente devido às perturbações decorrentes das incertezas. Nestas circunstâncias, um objetivo melhor seria um projeto ótimo que tenha um alto grau de robustez. O processo de encontrar este ótimo é chamado otimização robusta. Aqui, abordaremos duas técnicas para a análise das estatísticas do problema: o método de Monte Carlo e o método da Colocação Probabilística. Várias medidas de robustez têm sido propostas na literatura, em particular, o valor médio e o desvio padrão da função envolvida no problema de otimização serão aqui considerados. Quando estas medidas de robustez são usadas combinadas, a procura de projetos ótimos robustos surge como um problema de Otimização Multiobjetivo Robusta (RMO). O procedimento adequado quando um problema multiobjetivo precisa ser resolvido, é determinar a fronteira de Pareto. Para tal metodologias específicas serão implementadas. Como o procedimento de RMO é computacionalmente custoso, técnicas de aproximação, baseada no uso do Método da Base Reduzida, são incorporadas ao nosso procedimento. O propósito do método é obter um modelo de alta fidelidade com custo computacional aceitável. Problemas contínuos em duas dimensões submetidos a carregamentos estáticos e térmicos são as aplicações consideradas neste trabalho, os desempenhos das diferentes estratégias examinadas são comparadas. A combinação das várias técnicas de aproximação descritas permitiu a obtenção das soluções OMR com baixo custo computacional.*

Palavras-chave: *Otimização robusta, método da colocação probabilística, otimização multiobjetivo, método da base reduzida*

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas o tema otimização, alcançou grandes avanços com o crescimento da capacidade computacional e com os progressos dos algoritmos. Entretanto, na maioria das aplicações da engenharia, a abordagem tradicional, considera modelos determinísticos, apesar de algum grau de incerteza ou variação nas características de qualquer sistema estrutural ser inevitável. Infelizmente a abordagem determinística pode levar a soluções cujo desempenho pode cair significativamente devido a perturbações decorrentes de incertezas.

Neste trabalho, são examinadas algumas abordagens para a consideração das incertezas no processo de otimização e assim obter projetos robustos. As medidas de robustez utilizadas são a esperança e o desvio padrão (ou a variância) da função de interesse. Quando se usa estas medidas, a busca por um projeto robusto ótimo, recai num problema de decisão com múltiplos critérios, ou seja numa otimização multiobjetivo robusta (Robust Multiobjective Optimization - RMO). Para o cálculo dos parâmetros estatísticos serão empregadas duas técnicas, o método de Monte Carlo (MC) e o método da colocação probabilística (Probabilistic Collocation Method - PCM). A idéia básica deste método é aproximar numericamente o cálculo dos momentos estatísticos (esperança e desvio padrão) através de simulações determinísticas. Neste artigo, antes da análise do problema de otimização estrutural robusta, estudos comparativos considerando ambas as técnicas envolvendo funções analíticas são apresentados.

Como otimizadores de propósito geral não resolvem diretamente os problemas de RMO, metodologias baseadas no conceito de Pareto são aqui utilizadas para obter projetos ótimos robustos, sujeito a vários critérios. Neste contexto, foram implementadas estratégias eficientes para a obtenção de pontos de Pareto através de algoritmos como o NBI (Normal-Boundary Intersection) e o NNC (Normalized Normal-Constraint). Estas estratégias foram implementadas junto com outras abordagens comumente utilizadas na literatura, como o método da soma ponderada e o método Min-Max.

Uma vez que o custo de se obter soluções para problemas RMO, pode ser bastante elevado, o método das bases reduzidas (Reduced Basis Method - RBM) é considerado para a construção de um metamodelo para o problema original, visando obter múltiplas soluções com baixo custo computacional. O RBM é uma projeção do tipo Galerkin em um espaço de aproximação de baixa ordem que contém soluções para o problema de interesse em pontos selecionados do espaço de projeto.

A combinação dos métodos aproximados apresentados, bem como das técnicas de obtenção de pontos Pareto, permitem a solução de problemas RMO eficientemente. Para demonstrar o desempenho das diversas estratégias e metodologias utilizadas, alguns problemas bidimensionais envolvendo carregamento estático e/ou carregamento térmicos serão apresentados.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Neste trabalho serão utilizados dois controles principais do objetivo: a média e o desvio padrão de uma dada função. Esta consideração tem sido adotada em várias referências no contexto da otimização robusta (Beyer et al, 2007; Schuëller e Jensen, 2008). Otimizando a média encontra-se um ótimo menos conservador, pois pode existir uma probabilidade razoável do desempenho ser bem pior (ou melhor) que o valor encontrado. Enquanto que quando um processo de otimização é realizado sobre o desvio padrão se está sendo conservativo, e encontra-se o ponto onde há a menor variação da função de interesse, sendo esta uma das principais medidas de robustez. Como já mencionado este tipo de consideração leva a um problema de otimização multiobjetivo, para se encontrar soluções intermediárias de interesse ("Robust Multiobjective Optimization" - RMO).

O problema de RMO mencionado anteriormente pode ser formulado como:

$$\text{Minimizar: } \mathbf{F}(\xi, \mathbf{x}) = [E(f(\xi, \mathbf{x})), \sigma(f(\xi, \mathbf{x}))] \quad (1)$$

$$g_i(\xi, \mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$h_j(\xi, \mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, \ell \quad (2)$$

$$x_k^l \leq x_k \leq x_k^u \quad k = 1, \dots, n_{dv}$$

onde $E(*)$ é a esperança, $\sigma(*)$ o desvio padrão, f é a função de interesse, ξ é o vetor das variáveis aleatórias, \mathbf{x} o vetor das variáveis de projeto, $\mathbf{F}(\xi, \mathbf{x})$ é o conjunto das funções objetivo, as quais se deseja otimizar, $g_i(\xi, \mathbf{x})$ são as restrições de desigualdade, $h_j(\xi, \mathbf{x})$ são as restrições de igualdade e x_k^l, x_k^u são os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto.

3. CÁLCULO DAS ESTATÍSTICAS

Para toda variável aleatória ξ , existe uma *Função Densidade de Probabilidade* ("Probability Density Function" - PDF) $P(\xi)$ que define a distribuição de ocorrências de $\xi \in \mathbb{R}$ associada a um fenômeno aleatório (Meyer, 1983).

Se ξ é uma variável aleatória, então uma função qualquer $f(\xi)$ também será, porém com uma PDF própria associada. Dois parâmetros estatísticos das PDF importantes são a média ou esperança $\bar{f}(\xi)$ e o desvio padrão $\sigma(f)$ e podem ser calculados da seguinte forma

$$\bar{f} = E[f(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)P(\xi)d\xi \quad (3)$$

$$\sigma_f^2 = E[f(\xi)^2] - (\bar{f})^2 = \overline{f^2} - (\bar{f})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f(\xi)^2)P(\xi)d\xi - (\bar{f})^2 \quad (4)$$

onde σ_f^2 é conhecida como a variância de $f(\xi)$.

Neste trabalho serão utilizados dois métodos não-intrusivos para o cálculo das estatísticas da função, o método de *Monte Carlo* (MC) e o *Método da Colocação Probabilística* ("Probabilistic Collocation Method" - PCM) (Ramamurthy, 2005). Considerando as Equações (3) e (4), a idéia básica é aproximar numericamente estas integrais, através de simulações determinísticas. Ambas as metodologias serão tratadas nas seções subseqüentes.

3.1. Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é o mais popular método não-intrusivo e pode ser utilizado para qualquer problema de propagação de incerteza (Keane e Nair, 2005). No método de MC as funções $f(\xi)$ de interesse, são calculadas em m pontos $\xi_{(i)}$, $i = 1 \dots m$ gerados aleatoriamente a partir de suas distribuições $P(\xi)$, então as integrais das Equações (3) e (4) são aproximadas, respectivamente, por:

$$\bar{f} \simeq \bar{f}_{MC} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(\xi_{(i)}) \quad (5)$$

$$\sigma[f(\xi)]^2 = \sigma_f^2 \simeq \hat{\sigma}_f^2 = \frac{1}{m-1} \left[\sum_{i=1}^m (f(\xi_{(i)})^2) - m(\bar{f}_{MC})^2 \right] \quad (6)$$

onde m é o número de pontos amostrados, \bar{f}_{MC} é a aproximação de MC da média de $f(\xi)$ e $\hat{\sigma}_f$ é a aproximação de MC do desvio padrão de $f(\xi)$.

Pode-se calcular a partir das Equações (5) e (6) os gradientes da média e do desvio padrão em relação a variáveis quaisquer (aleatórias ou determinísticas). Estes gradientes serão requeridos durante o processo de otimização, e podem ser calculados derivando as Equações (5) e (6) em relação a uma variáveis de projeto qualquer x (Motta, 2009).

3.2. Técnicas de amostragem

No presente trabalho a metodologia utilizada para a geração das amostras será o LHS, onde o algoritmo usado pertence ao ambiente MATLAB 7.5 (Mathworks, 2007). O LHS é um método utilizado para a geração de uma amostra que cubra mais eficientemente o espaço das variáveis aleatórias, para um determinado número de pontos. A sua idéia básica é dividir o intervalo de cada uma das n dimensões da amostra pelo número de pontos pretendidos N , onde cada subintervalo tem a mesma probabilidade de ocorrência. Os N pontos são dispostos de forma que cada subintervalo de cada uma das n variáveis tenha apenas um ponto. As amostras LHS são geradas a partir de uma amostra aleatória com distribuição normal, a qual é ajustada para que as distribuições marginais de cada variável se aproxime da sua distribuição de probabilidade teórica (Stein, 1987).

Como será utilizada a mesma amostra-base, durante todo o processo de otimização, foi criada uma estratégia para a seleção de uma amostra, escolhida a partir de um conjunto de amostras. A amostra selecionada será a que apresentar as estatísticas mais próximas da desejada, a partir de uma determinada norma. Para mais detalhes sobre a seleção da amostra vide (Motta et al, 2009; Motta, 2009).

3.3. Método da Colocação Probabilística (PCM)

Métodos tradicionais como o MC, mesmo com técnicas de amostragem que melhoram sua eficiência, são inviáveis para serem aplicadas diretamente em modelos complexos de alta fidelidade. O Método da Colocação Probabilística ("Probabilistic Collocation Method" - PCM) (Ramamurthy, 2005) é uma ferramenta desenvolvida visando uma análise de incerteza eficiente em modelos complexos e computacionalmente custosos. A idéia básica do PCM é aproximar a resposta do modelo em função das variáveis aleatórias, por funções polinomiais, e estimar as integrais das Equações (3) e (4) por Quadratura de Gauss (Stoer e Bulirsch, 1991). O PCM se baseia nos conceitos de Quadratura de Gauss e de polinômios ortonormais. Então, antes de explanar sobre os pormenores da estrutura do PCM, é necessário apresentar os assuntos supracitados.

3.3.1. Polinômios Ortonormais

Dado um espaço linear de funções reais \mathcal{F} e considerando duas funções polinomiais $f(x), g(x) \in \mathcal{F}$, o produto interno aqui tratado é definido como:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{\mathcal{F}} f(x) g(x) P(x) dx \quad (7)$$

onde $P(x)$ é uma função de ponderação não negativa definida no espaço \mathcal{F} .

Este produto interno forma a base da integração por Quadratura de Gauss e para o PCM. Como já mencionado, as funções polinomiais $f(x), g(x) \in \mathcal{F}$ são ortogonais se seu produto interno for nulo. Um conjunto de polinômios $h_i(x)$ pertencentes ao espaço polinomial \mathcal{H} , pode ser definido como:

$$h_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}x + a_{i,2}x^2 \dots + a_{i,i}x^i = \sum_{j=0}^i a_{i,j}x^j \quad (8)$$

Estes polinômios serão ortonormais em relação a uma função de ponderação $P(x)$, se a seguinte relação existe para todos $h_i(x)$, $i=0,1..n$, onde o índice de h_i indica o grau do polinômio:

$$\langle h_i(x), h_j(x) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (9)$$

Através destas relações são encontrados os coeficientes $a_{i,j}$ que definem os polinômios ortonormais. Estes polinômios são únicos para cada função de ponderação dada, e formam uma base para \mathcal{H} . Todas as raízes $x_j^*, j = 1..i$ de um polinômio $h_i(x)$, estão contidas no espaço real, ou seja, $h_i(x_j^*) = 0$, $x_j^* \in \mathcal{F}$, $j = 1..i$, e dependem apenas da função de ponderação $P(x)$. As raízes de $h_i(x)$ formam os pontos de colocação da quadratura de Gauss. Para mais detalhes consulte (Gautschi, 2005).

3.3.2. Quadratura de Gauss

Na integração numérica via quadratura de Gauss para integrais da seguinte forma:

$$\int_F f(x)P(x)dx \quad (10)$$

Aproxima-se a função $f(x)$, por um polinômio de grau $2n-1$, a partir da base ortonormal do espaço \mathcal{H} , em relação à função de ponderação $P(x)$, onde n é o número de pontos de integração, tal como segue

$$f(x) \approx \hat{f}(x) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i h_i(x) \right) + h_n(x) \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i h_i(x) \right) \quad (11)$$

Na integral da Equação (10) aproximada por quadratura de Gauss, o segundo termo da aproximação dada em (11) se cancela (por ortogonalidade), assim como os termos para $i = 1..n-1$ do primeiro somatório da aproximação. A integral desejada (10), aproximada por quadratura de Gauss, pode ser expressa então da seguinte forma:

$$\int_F f(x)P(x)dx \approx b_0 h_0 \int_F P(x)dx \quad (12)$$

Para encontrar os coeficientes b_i e c_i da aproximação (Equação (11)), seria necessário o cálculo da função $f(x)$ em $2n$ pontos. Porém, como a integral não depende dos coeficientes c_i , pode-se calcular a função $f(x)$ nas n raízes x^* de $h_n(x)$, cancelando assim o segundo termo da aproximação apresentada na Equação (11), pois $h_n(x_i^*) = 0$, $i = 1..n$. Desta forma, os coeficientes b_i são encontrados resolvendo um sistema de nxn . Vale salientar que a matriz desse sistema depende apenas de dados previamente conhecidos: a função de ponderação $P(x)$, os polinômios ortonormais $h_i(x)$ e as raízes x^* . Esse sistema é resolvido e o coeficiente b_0 , valor incógnito da aproximação da integral (Eq. (12)), é calculado como uma combinação ponderada dos valores de $f(x)$ nos pontos x^* .

Definindo-se

$$C_0 = h_0 \int_F P(x)dx \quad (13)$$

O valor desejado é calculado como

$$\int_F f(x)P(x)dx \approx C_0 \sum_{i=1}^n P_i f(x_i^*) \quad (14)$$

onde os valores de P_i são os coeficientes de ponderação obtidos através da resolução do sistema de equações da aproximação. Vale ressaltar que não é necessário calcular estes parâmetros para as funções de distribuição conhecidas, pois estes valores são conhecidos e podem ser encontrados na literatura, bem como em bibliotecas computacionais da maioria dos programas.

3.3.3. Aplicando Quadratura de Gauss à estatística - PCM

A avaliação das estatísticas definidas nas Equações (3) e (4) considerando o PCM ("Probabilistic Collocation Method") é uma aplicação direta da quadratura de Gauss considerando o espaço das variáveis aleatórias ξ e sua PDF

como função de ponderação. Portanto tem-se que $\int_F P(\xi)d\xi = 1$ e $h_0 = 1$, conseqüentemente a constante $C_0 = 1$ (definida pela Equação (13)). Com isso o valor da integral (12) é aproximado apenas por b_0 . Os polinômios ortonormais são definidos para cada PDF. A média e o desvio padrão de uma resposta de interesse serão aproximados pelo PCM da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{PC} &= \sum_{i=1}^n P_i f(\xi_{(i)}^*) \\ \hat{\sigma}_{PC}^2 &= \sum_{i=1}^n P_i f(\xi_{(i)}^*)^2 - \bar{f}_{PC}^2 \end{aligned} \tag{15}$$

onde $\xi_{(i)}^*$, $i = 1..n$ são as raízes do polinômio ortonormal.

Pode-se calcular a partir da Equação (15) os gradientes da média e do desvio padrão em relação a variáveis quaisquer, aleatórias ou determinísticas, da mesma forma como foi feito para o MC, derivando a Equação (15) em relação às variáveis de projeto x (Motta, 2009).

Uma dificuldade da integração por Quadratura de Gauss e que também padece o PCM é a chamada maldição dimensional (“dimensional curse”), pois o número de pontos de integração (para um mesmo grau de aproximação) cresce exponencialmente com o número de dimensões do problema. Ou seja, no caso do PCM, o número de variáveis aleatórias a ser considerada não deve ser elevado.

Para problemas com muitas variáveis aleatórias, pode-se utilizar para integração numérica técnicas de grades esparsas (“sparse grids”) baseadas nas regras de Smolyak (1963) para integração multivariável, diminuindo consideravelmente o número de pontos de colocação, para mais detalhes vide (Heiss e Winschel, 2008).

3.4. Verificação - PCM

Uma verificação geral da metodologia irá ser feita aqui, através do cálculo da média e do desvio padrão para uma função polinomial de grau $N_p = 8$ de uma variável aleatória $\xi \sim N(0,1)$ (PDF Normal), para este caso o PCM deve obter uma solução exata para um determinado número de pontos. A função polinomial que será utilizada é:

$$f(\xi) = \frac{1}{C} \prod_{i=1}^{N_p} (\xi - i(-1)^i) \tag{16}$$

onde $C = (N_p!)$.

Vale salientar que para o cálculo exato da média de um polinômio de 8º grau, são necessários 5 pontos de colocação, pois $2n-1 = 9$. Já para o cálculo do desvio padrão, a função aproximada pelo PCM é a $f(\xi)^2$, o que leva a um polinômio de 16º grau, sendo necessários 9 pontos de colocação ($2n-1 = 17$) para a convergência do PCM. A Fig. (1) ilustra o erro no cálculo da média e do desvio padrão pelo PCM, para aproximações que utilizam de 3 até 9 pontos, onde nota-se a convergência esperada do método.

A Fig. (1) sumariza os resultados obtidos pelos dois métodos o MC (utilizando amostras LHS) e o PCM, onde o erro mínimo foi fixado em 10^{-10} . Percebe-se a grande vantagem do PCM para este caso.

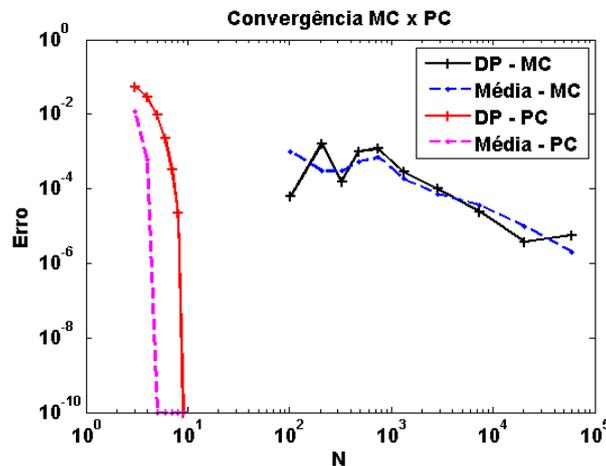


Figura 1. Teste de convergência dos métodos MC e PCM, para um caso polinomial (erro mínimo fixo: 10^{-10}).

3.5. Exemplo - Função Periódica

Neste exemplo será comparado o PCM com o LHS-MC considerando-se a função $f(X,Y) = \text{sen}(X)\text{cos}(Y)$, onde X e $Y \sim N(1,\sigma)$ são variáveis aleatórias independentes. Para este exemplo o valor do desvio padrão σ será variado para que se tenham diferentes “regiões de abrangência” (regiões onde há probabilidade de ocorrência significativa) das variáveis aleatórias. O MC foi testado com amostra LHS de 50.000 pontos, enquanto que para o PCM utilizou-se 7 pontos de colocação para cada variável, totalizando 49 pontos de colocação analisados.

Assim um estudo paramétrico sobre o desvio padrão σ das variáveis aleatórias foi conduzido, variando-o de 0.2 até 2.6. A Fig. (2) mostra para cada valor de σ , no intervalo (de 0.2 até 2.6), o valor das estatísticas da função, média (Fig. (2a)) e desvio padrão (Fig. (2b)), bem como os erros de cada método no cálculo da média Fig. (2c) e no cálculo do desvio padrão (Fig. (2d)).

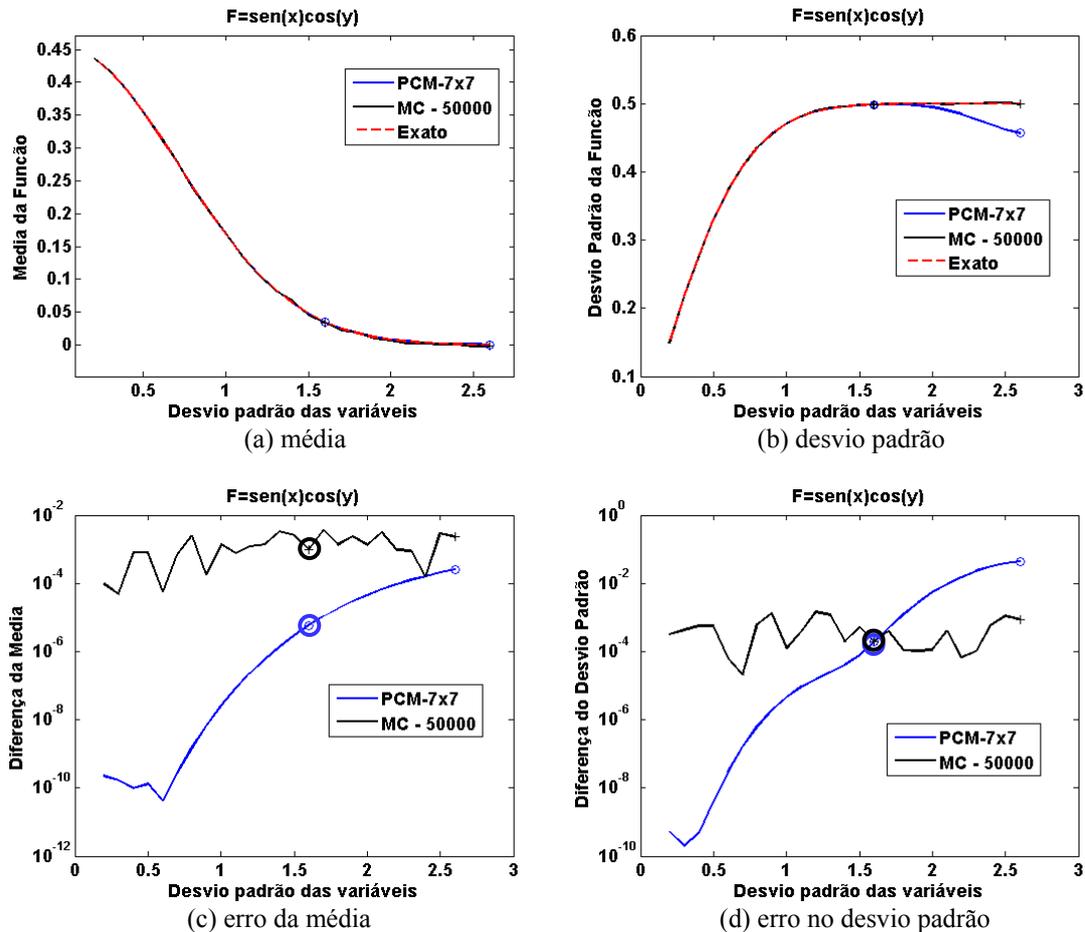


Figura 2. Estudo paramétrico da função $f(X,Y)$ variando σ das variáveis aleatórias: (a) média, (b) desvio padrão, erros de cada método no cálculo (c) da média e (d) do desvio padrão.

Note que, quanto menor o desvio padrão das variáveis aleatórias, mais “simples” será sua região de influência na função $f(X,Y)$ (menos oscilações, i.e. picos e vales). Como se pode observar o PCM com 49 pontos se mostrou melhor para valores menores de σ (menor região de abrangência), para todas as aproximações da média e do desvio padrão. Já o MC apresentou um desempenho quase constante, não apresentando grande variação na ordem de grandeza do erro com o aumento do desvio padrão.

Vale frisar que com os parâmetros utilizados neste exemplo, a solução via o PCM é três ordens de grandeza mais rápido que o LHS-MC, devido à diferença no número de pontos em que a função é avaliada por cada método (49 pontos o PCM e 50×10^3 pontos o MC).

À medida que se aumenta o valor de σ , aparecem regiões de mínimos e máximos e um comportamento multimodal é verificado para a função $f(X,Y)$. Quando o número de regiões de mínimos e máximos torna-se elevado para um mesmo número de pontos de colocação, a aproximação do PCM apresenta dificuldades. Uma alternativa seria usar métodos que utilizam aproximações discretas, dividindo o domínio das variáveis aleatórias, como o “Multi-Element Probabilistic Collocation Method” (ME-PCM) (FOO, 2008).

Na Fig. (3) é apresentada a superfície da função $f(X,Y)$, os pontos de colocação do PCM (em “azul”) e os pontos de integração do MC (em “preto”), para o valor inicial de $\sigma = 0.2$, o que dá uma idéia da região de abrangência inicial. Os resultados deste caso correspondem aos indicados pelos inícios das curvas apresentadas na Fig. (2).

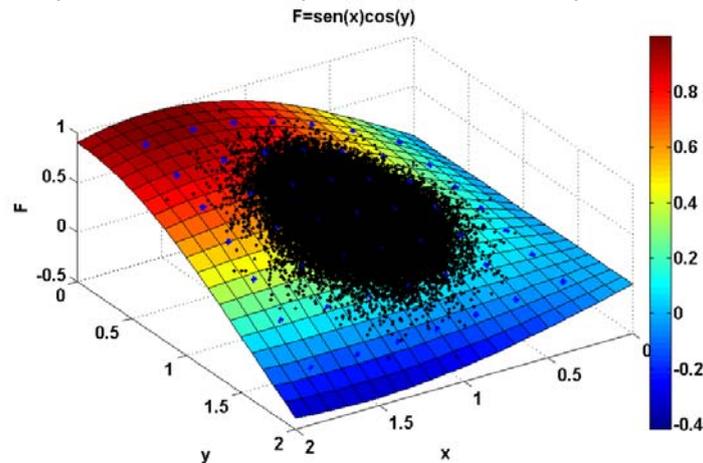


Figura 3. Superfície da função $f(X,Y)$, pontos de colocação do PCM, e amostra do MC para o valor inicial de $\sigma = 0.2$.

Na Fig. (4) é apresentada a superfície da função $f(X,Y)$ e os pontos de colocação do PCM, para o valor de $\sigma = 1.6$, o que já poderia ser considerado um valor “elevado” de desvio padrão, onde tem-se um grande número de picos e vales contemplados. Porém, como se pode ver nas Fig. (2c) e (2d), através dos pontos circulosados no gráfico, o PCM com 49 pontos ainda apresenta um resultado melhor que o MC com 50.000 pontos, tanto para a média, com erro $O(10^{-5})$, quanto para o desvio padrão, com erro $O(10^{-4})$, este último com pequena diferença para o MC. Só a partir deste ponto, com o aumento do desvio padrão da variável aleatória ($\sigma > 1.6$), o MC com amostra LHS de 50.000 pontos começa a apresentar resultados melhores que o PCM no cálculo de desvio padrão da função. Para o cálculo da média o PCM obteve erros menores para todo o intervalo do σ analisado.

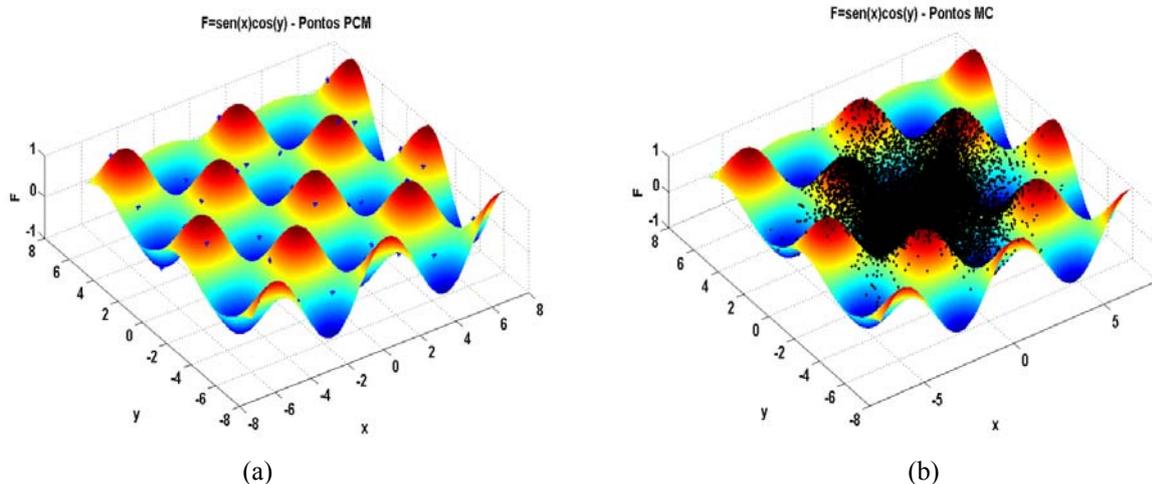


Figura 4. Valor de $\sigma = 1.6$ da variável aleatória, onde o PCM ainda obtém resultado mais correto: (a) Pontos de colocação do PCM e (b) Pontos de integração do MC.

4. EQUAÇÕES GOVERNANTES DE PROBLEMAS ELÁSTICOS

Utilizando-se a discretização padrão de Galerkin a equação governante do problema de elasticidade estática na forma compacta é escrita como (Ziekiewicz e Taylor, 2000)

$$\mathbf{K}_s \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (13)$$

onde \mathbf{K}_s é a matriz de rigidez da estrutura, \mathbf{u} é o vetor dos deslocamentos incógnitos e \mathbf{F} é o vetor dos carregamentos, dados respectivamente por:

$$\mathbf{K}_S = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{F} = \int_{V^*} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma^n} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_n d\Gamma + \int_{\Gamma^t} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_t d\Gamma \quad (14)$$

Nas equações acima, \mathbf{D} é a matriz de elasticidade, \mathbf{B} é a matriz que relaciona os deslocamentos e suas derivadas \mathbf{b} é o vetor das forças de volume agindo sobre o domínio, \mathbf{f}_n e \mathbf{f}_t são respectivamente os vetores das forças normais e tangentes aplicadas no contorno Γ e \mathbf{N} é a matriz relacionada com as funções de forma utilizadas pelo Método dos Elementos Finitos em modelos bi-dimensional.

5. MODELO SUBSTITUTO - RBM

A idéia central é construir uma aproximação para os deslocamentos e conseqüentemente para qualquer resultado da análise estrutural (nesse estudo foi focada a flexibilidade) satisfazendo a eficiência e precisão requerida (Prud'homme et al, 2002).

O MBR consiste numa projeção do tipo Galerkin em um espaço de ordem reduzida que contém soluções (base) para o problema de interesse em pontos selecionados do espaço de projeto. Para construir a aproximação do método das bases reduzidas, escolhe-se uma amostra do espaço das variáveis de projeto onde o problema é analisado. As respostas obtidas formam uma base para um subespaço reduzido das soluções onde as equações são projetadas e onde as soluções em pontos quaisquer no espaço das variáveis de projeto serão aproximadas (Motta, 2009).

O uso de uma decomposição para a matriz rigidez e do vetor de carregamento do problema convencional (de alto custo) é a estratégia fundamental para a eficiência do método. O conceito da separabilidade junto com a formulação do problema no domínio de referência nos permite identificar os termos dependentes/independentes das variáveis de projeto definidos pelos parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ nas equações governantes e conseqüentemente nas equações projetadas na base reduzida (Afonso et al, 2009). Como consequência desta divisão, a implementação computacional para o MBR é conduzida através de um algoritmo off-line/on-line descrito na Tab. 1.

A idéia é que o estágio off-line é feito uma única vez, gerando um pequeno conjunto de dados como sub-matrizes de rigidez \mathbf{K}^{rN} e vetores de carga \mathbf{F}^{rN} . Subseqüentemente o estágio on-line irá acessar estes dados para fornecer resposta em tempo real para o novo $\boldsymbol{\mu}$.

A análise de sensibilidades necessária pelo procedimento de otimização será calculada aqui considerando o método direto analítico (Motta, 2009). As expressões para o cálculo dos gradientes são mostradas também na Tab. 1. O cálculo dos gradientes é feito rapidamente, devido à decomposição da matriz rigidez e do vetor de carga, descritos anteriormente.

Tabela 1. Algoritmo do Método da Base Reduzida: OFF-LINE/ON-LINE. (Problemas de elasticidade).

<p>OFF-LINE – independente de $\boldsymbol{\mu}$:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Escolhe a amostra: $\mathbf{S}^N = \left\{ (x_1, \dots, x_R)^1, \dots, (x_1, \dots, x_R)^N \right\}$ 2. Constrói a matriz de soluções via MEF: $\mathbf{Z} = [\zeta^1, \dots, \zeta^N]$; 3. Constrói a matriz da Base Reduzida: $\mathbf{K}_j^{rN} = \mathbf{Z}^T \mathbf{K}_j^r \mathbf{Z}$; 4. Constrói o vetor de cargas da Base Reduzida: $\mathbf{F}_j^{rN} = \mathbf{Z}^T \mathbf{F}_j^r$ <p>ON-LINE – para um novo vetor $\boldsymbol{\mu}$:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Forma a matriz da Base Reduzida: $\mathbf{K}^N = \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{nt} \beta(\mathbf{x})_j^r \mathbf{K}_j^{rN}$ 2. Forma o vetor de cargas da Base Reduzida: $\mathbf{F}^N = \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{nt} \phi(\mathbf{x})_j \mathbf{F}_j^{rN}$ 3. Resolve: $\mathbf{K}^N \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^N$ 4. Calcula: $s^N = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{F}^N$ 5. Resolve: $\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial x_i} = \left[\mathbf{K}^N \right]^{-1} \left(\mathbf{F}^N - \frac{\partial \mathbf{K}^N}{\partial x_i} \boldsymbol{\alpha} \right), i = 1..n_{dv}$ 6. Calcula: $\frac{\partial s^N}{\partial x_i} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}{\partial x_i} \mathbf{F}^N$

6. CONCEITO DE PARETO

Nos problemas de otimização multiobjetivo encontrar um x^* que minimize várias funções objetivo simultaneamente é uma tarefa muito árdua, senão impossível para a quase totalidade dos problemas. Uma forma de determinar um x que satisfaça em parte os RMO (Equações (1) e (2)) está contida na definição de Otimalidade de Pareto (Arora et al., 2007).

Pontos de Pareto são pontos x^p tais que não exista nenhum ponto x o qual:

- i) $f_k(x) \leq f_k(x^p)$ para $k = 1, \dots, n$
- ii) $f_k(x) < f_k(x^p)$ para uma função objetivo ao menos

Os pontos de Pareto apresentam a propriedade de que quando se movem na direção decrescente de uma das funções, pelo menos uma das outras funções tem seu valor aumentado, i.e. não é possível diminuir todas as funções simultaneamente.

Existem várias técnicas para se obter o chamado conjunto de mínimo de Pareto (Das e Dennis, 1997; Collette, 2004). Entre eles, métodos baseados em metodologias metaheurísticas têm sido usados com algum sucesso (Lalonde et al 2009). Porém, neste trabalho apenas serão considerados procedimentos que fazem uso de programação matemática. Os métodos considerados serão os seguintes: Método da Soma Ponderada (Weight Sum) (Steuer, 1985), Método Min-Max (Hwang et al, 1980), Método NBI (Normal-Boundary Intersection) (Das e Dennis, 1997) e o Método NNC (Normalized Normal-Constraint) (Messac et al, 2003).

7. EXEMPLO

O exemplo prático a ser considerado é o problema apresentado na Fig. (5) e que se refere à análise do estado plano de tensões em uma placa quadrada com um orifício central, onde apenas 1/4 da estrutura foi analisado devido à dupla simetria.

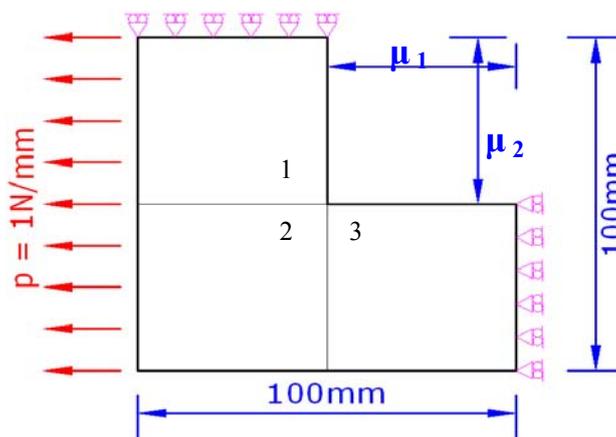


Figura 5. Definição do problema: um quarto de uma placa quadrada com um orifício central.

O Módulo de elasticidade da região 3 é uma variável aleatória com distribuição lognormal de média 5×10^4 MPa e desvio padrão 10^4 MPa. As dimensões do orifício são as variáveis do projeto selecionadas para a otimização. Os valores iniciais das variáveis de projeto são $\mu_1 = \mu_2 = 50$ mm, e os limites inferior e superior impostos são 25mm e 75mm, respectivamente.

Tal como definido, dois objetivos estocásticos são considerados são eles: minimizar a média e o desvio padrão da flexibilidade. Ao volume da estrutura, é imposto ser inferior ou igual ao seu valor inicial. Além desta restrição, a média da tensão mais três vezes seu desvio padrão é restrito a magnitude de 7.0 N/mm². As soluções RMO serão obtidas considerando 15 pontos de Pareto. O problema de otimização é formulado como:

Minimizar: $[E(f(\mu, E_3)), \sigma(f(\mu, E_3))]$

sujeito à

$$E(\tau_{eq(i)}(\mu, E_3)) + 3\sigma(\tau_{eq(i)}(\mu, E_3)) \leq 7 \text{ MPa} \quad i = 1, \dots, n_{el}$$

$$V(\mu) \leq V_0$$

$$25 \text{ mm} \leq \mu_k \leq 75 \text{ mm} \quad k = 1, \dots, n_{dv}$$

onde $f(\mu, E_3)$ é a flexibilidade, $\tau_{eq(i)}(\mu, E_3)$ é a tensão Von Mises no elemento i , $V(\mu)$ o volume da estrutura, V_0 o volume inicial, n_{el} é o número de elementos e n_{dv} o número de variáveis de projeto.

O modelo de elementos finitos considerado possui 3900 graus de liberdade com elementos de dimensão média de 2mm, na configuração de referência onde $\mu_1 = \mu_2 = 50$ mm.

Para a aproximação via MBR, 3 regiões (indicadas na figura) são definidas. A base reduzida será construída no espaço viável das variáveis de projeto, bem como das variáveis aleatórias, $D = [25, 75]^2$ e o número de amostras analisadas foi $N = 16$.

A Tabela 2 sumariza os desempenhos de cada método investigado em segundos. Soluções obtidas pelo PCM são três ordens de magnitude mais rápidas em comparação com os resultados obtidos via MC.

Tabela 2. Placa quadrada com um orifício central – desempenhos dos algoritmos.

(segundos)	WS	Min-Max	NBI	NNC
MC 5000 pontos	38 623	26 486	19 480	18 633
PC 5 pontos	60	43	31	28

A Fig. (6) apresenta as distribuições dos pontos Pareto obtidos para os métodos aqui considerados para a otimização multiobjetiva, comparando os métodos de Monte Carlo (MC) e o Método da Colocação Probabilística (PCM). Para o cálculo das estatísticas foram utilizados 5000 pontos para o MC e 5 pontos de colocação para o PCM, em testes realizados esses parâmetros apresentaram um erro da ordem de 10^{-4} pelo MC e 10^{-7} pelo PCM. As curvas de Pareto obtidas via MC e PC estão de acordo, mesmo com a grande diferença no número de pontos calculados. Como pode ser observado, soluções pelos métodos NBI e NNC são as que conseguem obter pontos uniformemente espaçados em todas as partes da fronteira de Pareto.

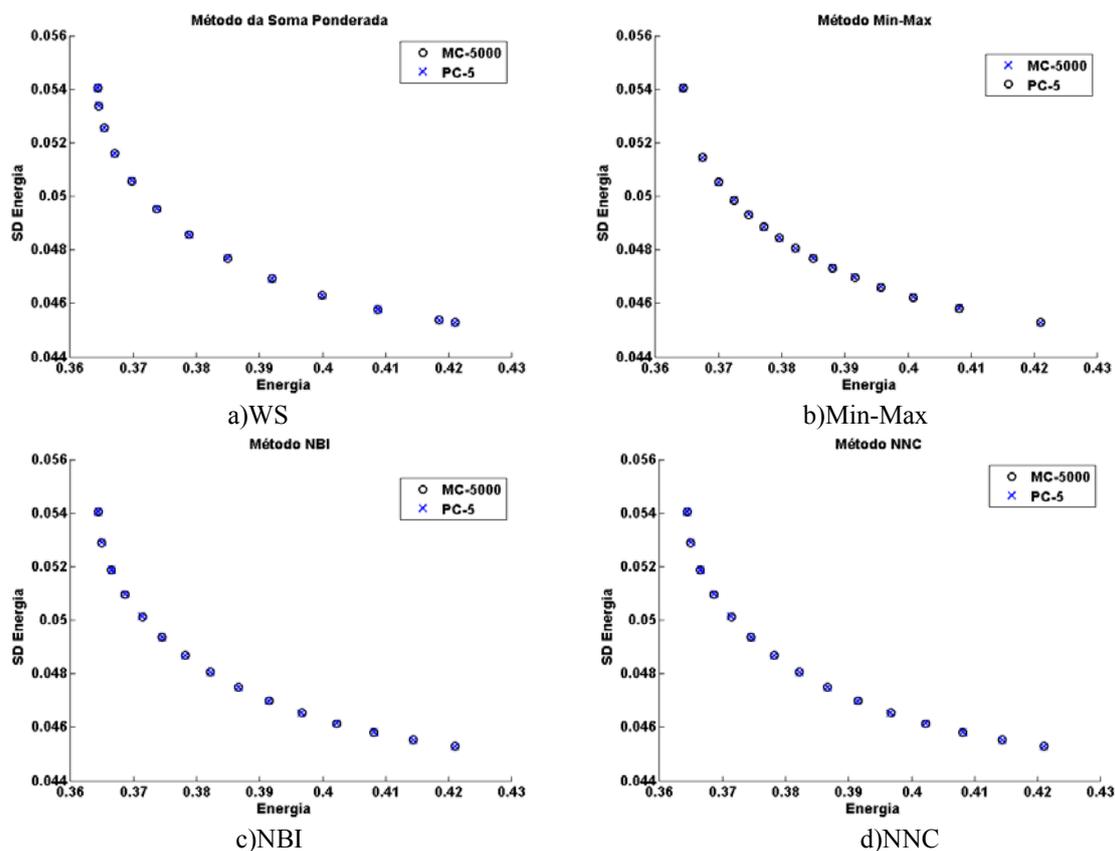


Figura 6. Placa quadrada com um orifício central – Pontos de Pareto: a) WS, b) Min-Max, c) NBI, d) NNC.

8. CONCLUSÃO

As duas metodologias (MC e PCM) empregadas para o cálculo das estatísticas de várias respostas apresentaram resultados satisfatórios. O número de simulações necessárias para uma aproximação com erros de mesma magnitude foi mais de três ordens de grandeza menor via PCM, quando comparado ao MC. No entanto o PCM pode requerer um número elevado de pontos de colocação, em casos em que a função de interesse apresentar muitas variáveis aleatórias. Além disso, vale observar que o PCM pode não obter soluções satisfatórias em casos de funções com pontos de singularidades ou comportamento multimodal.

Foram introduzidas as incertezas no problema de otimização e suas estatísticas calculadas através dos métodos MC e o PCM, implementados e investigados para o cálculo das estatísticas de interesse, e assim obter resultados ótimos robustos sob múltiplos critérios. E por fim, foram apresentados os exemplos utilizando este conceito, para um problema de otimização estrutural.

Os resultados obtidos mostram a grande vantagem em usar o PCM padrão para os problemas de otimização aqui considerados, i.e. para funções suaves e com poucas variáveis aleatórias. A combinação das várias técnicas de aproximação descritas, além de métodos eficientes para lidar com problemas multiobjetivo, permitiram a obtenção das soluções RMO em pouco tempo computacional.

9. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e a CAPES pelo suporte financeiro.

10. REFERÊNCIA

- Afonso S. M. B., Lyra P. R. M., Albuquerque T. M. M., Motta R. S., 2009, "Structural Analysis and Optimization in the Framework of Reduced-Basis Method". *Structural and Multidisciplinary Optimization*. vol. 40, pp. 177-199.
- Arora J. S.; Messac, A.; Mullur, A. A., 2007, "Optimization of Structural and Mechanical Systems. Chapter 4 - Multiobjective Optimization: Concepts and Methods". Jasbir S Arora, University of Iowa, USA.
- Beyer, H. G.; Sendhoff, B., 2007, "Robust Optimization – A Comprehensive Survey". *Computational Methods and Applications in Mechanical Engineering*. 196.
- Collette, Y., Siarry, P., 2004, "Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies", Springer.
- Das, I.; Dennis, J.E., 1996, "Normal Boundary Intersection: A New Method for Generating Pareto Surface in Nonlinear Multicriteria Optimization Problems". *SIAM J. Optimization*, Vol. 8, No. 3, pp. 631-657.
- Foo, J., Wan, X., Karniadakis, G. E., 2008, "The multi-element probabilistic collocation method (ME-PCM): Error analysis and applications". *Journal of Computational Physics* 227.
- Gautschi, W., 2005, "Orthogonal polynomials (in Matlab)". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 178, 2005, pp. 215-234.
- Heiss, F.; Winschel, V., 2008, "Likelihood approximation by numerical integration on sparse grids", *Journal of Econometrics*, 144, p. 62-80.
- Hwang, C. L.; Paidy, S. R.; Yoon, K. E Masud, A. S. M., 1980, "Mathematical Programming with Multiple Objectives: A Tutorial", *Comput. and Ops. Res.*, Vol. 7, pp. 5-31.
- Keane, A. J.; Nair P. B., August 2005, "Computational Approaches for Aerospace Design: The Pursuit of Excellence". John-Wiley and Sons. 602 p.
- Lalonde, N.; Kim, I. Y.; Weck, O., 2009, "A Comprehensive Comparison Between Deterministic and Probabilistic Multiobjective Optimization Algorithms with Mathematical and Practical Applications". 8^o World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization. Lisbon, Portugal.
- Mathworks, 2007, "MATLAB User's Guide". Mathworks Inc., Natick.
- Meyer, P. L., 1983, "Probabilidade: Aplicações à Estatística", 2a edição, Rio de Janeiro, LTC.
- Motta, R. S., Afonso, S. M. B., Lyra, P. R. M., 2009, "Robust Optimization for 2d Problems Considering Reduced-Basis Approximations". XXX-CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering Búzios-RJ Brazil.
- Motta, R. S., 2009, "Otimização Robusta de Estruturas Utilizando o Método da base Reduzida". Tese de mestrado. Dep. de Eng. Civil, UFPE, Recife-PE Brazil.
- Messac, A.; Mattson C.A., 2004, "Normal Constraint Method with Guarantee of Even Representation of Complete Pareto Frontier", 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Material Conference, Palm Springs, CA.
- Prud'homme, C., Rovas, D.V., Veroy, K., Machiels L., Maday Y., Patera A.T., & Turicini G., 2002, "Reliable Real-time Solution of Parametrized Partial Differential Equations: Reduced-basis Output Bound Method". *Journal of Fluids Eng.* n.124, pp. 70-79.
- Ramamurthy, D., 2005, "Smart Simulation Techniques for the Evaluation of Parametric Uncertainties in Black Box Systems". Thesis (M.S. in computer science). Washington State University.
- Schuëller, G.I.; Jensen, H.A., 2008, "Computational Methods In Optimization Considering Uncertainties – An Overview." *Computational Methods and Applications in Mechanical Engineering*.
- Stein, M, 1987, "Large Sample Properties of Simulations Using Latin. Hypercube Sampling". *Technometrics*, vol 29, no.2.
- Stoer, J.; Bulirsch, R., 1991, "Introduction to Numerical Analysis - Second Edition". Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin. p. 150-166.
- Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., 2000, "The Finite Element Method", New York, McGraw-Hill.
- Steuer, R. E., 1985, "Multicriteria optimization – theory, computation and application". John Wiley & Sons.

11. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso neste artigo.

ROBUST STRUCTURAL OPTIMIZATION

Renato de Siqueira Motta, renatodesiqueira@hotmail.com¹

Silvana Maria Bastos Afonso, smb@ufpe.br¹

Paulo Roberto Maciel Lyra, prmlyra@ufpe.br²

¹ Departamento de Engenharia Civil, ² Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco, Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n – Cid. Universitária
Recife - Brasil. CEP: 50740-530.

Abstract: *The traditional approach for optimization of several applications in engineering problems considers deterministic parameters and models. Unfortunately, the deterministic approach could lead to solutions which performance could decay significantly due to perturbations caused by uncertainties. In these circumstances a better aim would be an optimum design with a certain robustness. The process of finding such optimum is called robust optimization. In this work two techniques are considered for statistics calculations: The Monte Carlo method and the point collocation method. Several robustness measures have been proposed in literature in particular the mean and the standard deviation of the function involved in the optimization problem considered will be here considered. When these robustness measures are combined together, the search for optimum robust designs appears as multiobjective robust optimization (MRO). The adequate procedure to solve such problems to obtain the Pareto frontier. For that, specific methodologies will be implemented. As the MRO procedure is computationally expensive, approximation techniques based on the use of Reduced Basis Method are incorporated in our procedure. The main purpose of this is to obtain a high fidelity model with acceptable*

Keywords: *robust optimization, Probabilistic Collocation Method, multiobjective optimization, Reduced Basis Method*