

Uma Extensão do Modelo BEM Aplicada à Baixa Razão de Velocidade

Déborah Aline Tavares Dias do Rio Vaz, deborah.rio@gmail.com¹

Jerson Rogério Pinheiro Vaz, jerson@ufpa.br¹

Andre Luiz Amarante Mesquita, andream@ufpa.br¹

Claudio José Cavalcante Blanco, blanco@ufpa.br²

¹Universidade Federal do Pará – Faculdade de Engenharia Mecânica

Av. Augusto Correa, s/n - Belém, PA, Brasil – 66075-900

²Universidade Federal do Pará – Faculdade de Engenharia Sanitária e Ambiental

Av. Augusto Correa, s/n - Belém, PA, Brasil – 66075-900

Resumo: Neste trabalho, apresenta-se um esquema matemático otimizado da teoria clássica do momento do elemento de pá, para o dimensionamento de rotores lentos, como os que utilizam múltiplas pás, onde é considerada a influência da esteira sobre o plano do rotor na sua forma mais geral. Tal influência, mostra-se considerável quando a razão entre a velocidade na ponta da pá e a velocidade não induzida do escoamento é pequena, justificando a necessidade de formulações que prevêm os efeitos da esteira sobre o rotor. O modelo matemático proposto no presente trabalho corresponde a uma extensão da teoria do momento do elemento de pá, utilizando o modelo de Glauert, sobre o qual impõem-se uma modificação.

Palavras-chave: Método BEM, Rotores Lentos, Rotores com Múltiplas Pás, Modelo de Glauert

1. INTRODUÇÃO

O estudo de modelos matemáticos aplicados ao projeto de rotores com múltiplas pás, tem se tornado expressivo em função do uso de tecnologias de geração de energia. Tais modelos são baseados, em geral, na teoria do Momento do Elemento de Pá (do inglês: *Blade Element Momentum* – BEM), que considera o fator de indução na esteira o dobro do fator de indução no plano do rotor (Hansen, 2000), desconsiderando a forma mais geral estabelecida no trabalho desenvolvido por Eggleston e Stoddart (1987) para a influência da esteira. Na região de operação mais lenta do rotor, o modelo apresentado neste trabalho considera tal indução, corrigindo os altos valores dos parâmetros de influência no plano do rotor através de uma modificação na relação empírica de Glauert (1926). Para corrigir a condição de número infinito de pás, utiliza-se o modelo de Prandtl (Hibbs e Radkey, 1981). Finalmente, são mostrados os resultados obtidos, utilizando o modelo proposto, comparados com o método BEM clássico (Hansen, 2000).

2. O MODELO MATEMÁTICO

Um modelo de escoamento que considera as equações completas do momento angular para a rotação na esteira, foi apresentado por Joukowski (1918), aplicada por Glauert (1926) no estudo de propulsores, e mais tarde modificada por Wilson e Lissama (1974) para o caso de rotores eólicos, onde a indução no escoamento provocada pela esteira é o dobro da indução no plano do rotor. A Fig. 1 mostra o escoamento em um tubo de correntes (Hansen, 2000).

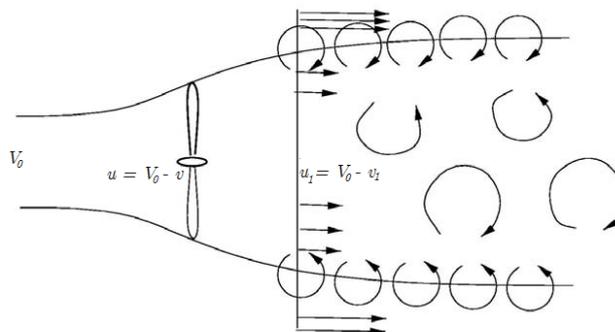


Figura 1. Esquema simplificado das velocidades no plano do rotor e na esteira (Hansen, 2000).

onde V_0 , é a velocidade não induzida do escoamento. A energia cinética, que é convertida em energia mecânica pela turbina é dada por (Brasil Junior, 2006)

$$E_c = \frac{1}{2} \rho A V_0^3 \quad (1)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, A é a área varrida pelas pás do rotor. As velocidades u e u_1 no plano do rotor e na esteira, respectivamente são induzidas e escritas na forma:

$$\begin{cases} V_0 - v = u \equiv (1 - a)V_0 \\ V_0 - v_1 = u_1 \equiv (1 - b)V_0 \end{cases} \quad (2)$$

onde $v = aV_0$ e $v_1 = bV_0$. a e b são os fatores de indução axiais no plano do rotor e na esteira, respectivamente e X é a razão entre as velocidades na ponta da pá e da correnteza (do inglês: *Tip-Speed-Ratio*). Aplicando a equação da energia (mostrado em detalhes no trabalho de Eggleston e Stoddard, 1987) para as velocidades induzidas Eq. (2), tem-se

$$a = \frac{b}{2} \left[1 - \frac{b^2(1-a)}{4X^2(b-a)} \right] \quad (3)$$

Mesquita e Alves (2000) desenvolveram um modelo matemático que considera a equação (3), a qual representa a forma mais geral entre a e b , estabelecendo a hipótese de que

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \quad (4)$$

resgatando a proposta do modelo BEM clássico, que considera os fatores de indução axial e tangencial na esteira o dobro dos fatores de indução no plano do rotor, fazendo $b = 2a$ e $b' = 2a'$. Já, no presente trabalho, além de considerar a Eq. (3), será lançada a hipótese de que a' e b' apresentam uma relação semelhante, o que leva a uma forma mais geral do que a estabelecida por Mesquita e Alves (2000).

$$a' = \frac{b'}{2} \left[1 - \frac{b'^2(1-a')}{4X^2(b'-a')} \right] \quad (5)$$

a' e b' são os fatores de indução tangenciais no plano do rotor e na esteira, respectivamente. Para solucionar as Eqs. (3) e (5), utiliza-se o método de Newton, em que, para cada valor de a e a' calculados, tem-se funções polinomiais de grau 3, dadas por

$$\Phi(b) = \frac{b}{2} \left[1 - \frac{b^2(1-a)}{4X^2(b-a)} \right] - a \quad (6)$$

$$\Gamma(b') = \frac{b'}{2} \left[1 - \frac{b'^2(1-a')}{4X^2(b'-a')} \right] - a' \quad (7)$$

cuja solução iterativa é obtida por (8) e (9). Neste caso, uma boa aproximação para o início do processo iterativo corresponde a $b = 2a$ e $b' = 2a'$.

$$b_i = b_{i-1} - \frac{\Phi(b_{i-1})}{\frac{d\Phi(b_{i-1})}{db}} \quad (8)$$

$$b'_i = b'_{i-1} - \frac{\Phi(b'_{i-1})}{\frac{d\Phi(b'_{i-1})}{db'}} \quad (9)$$

A utilização do método de Newton, consiste em obter sempre o menor valor real para o cálculo de $b \in \mathbb{R}$ e $b' \in \mathbb{R}$, visto que a variação dos fatores de indução na esteira é totalmente não linear em relação aos fatores de indução no plano do rotor (Fig. 2).

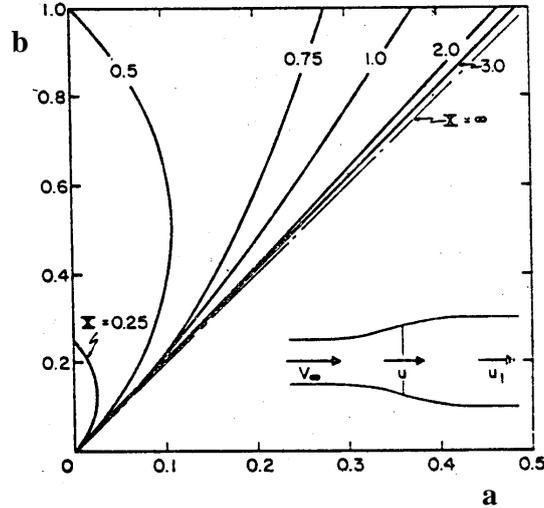


Figura 2. Relação b/a para alguns valores de X (Wilson e Lissaman, 1974).

2.1. Correção para o modelo de Glauert

A partir da correlação apresentada no trabalho de Hansen (2000), em que o ajuste de dados experimentais desenvolvidos por Glauert (1926), no caso de propulsores, resultam em

$$C_T = \begin{cases} 4a(1-a)F & a \leq \frac{1}{3} \\ 4a \left[1 - \frac{a}{2}(5-3a) \right] F & a > \frac{1}{3} \end{cases} \quad (10)$$

desenvolveu-se uma correção na Eq. (10), com o objetivo de considerar o caso mais geral para o cálculo do fator de indução no plano do rotor, Eq. (3), em que o coeficiente de empuxo passa a depender do fator de indução na esteira. Portanto, C_T assume as seguintes expressões modificadas:

$$C_T = \begin{cases} 2b(1-a)F & a \leq \frac{1}{3} \\ 2b \left[1 - \frac{a}{2}(5-3a) \right] F & a > \frac{1}{3} \end{cases} \quad (11)$$

O comportamento de C_T , em relação a a está apresentado na Fig. 3, onde ocorre um aumento do coeficiente de empuxo, para valores de $X = \{1,0; 1,5; 2,0\}$, o que é previsto pela relação entre b e a , conforme a Fig. 2, em que b assume valores maiores que o dobro de a , resultando no aumento de C_T para valores de a em torno de 0,5, uma vez, que C_T é diretamente proporcional a b . Nas Figs. 3, 4 e 5 as nomenclaturas BEM e Glauert, correspondem as teorias clássicas, e as nomenclaturas *Presente trabalho sem correção* e *Presente trabalho com correção* se referem aos modelos propostos neste artigo.

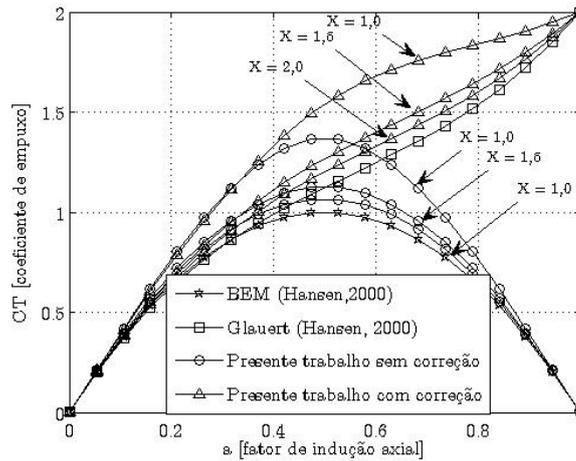


Figura 3. Solução do modelo proposto e os métodos BEM e Glauert (1926), para alguns valores de X .

O modelo proposto no presente trabalho utiliza a forma mais geral para o fator de indução axial, convergindo para o método BEM, com e sem correção de Glauert (1926), quando X é maior que 2,0, Fig. 3. A Fig. 4 compara os resultados obtidos com dados experimentais para $X = 4,0$ (Os dados experimentais foram obtidos de Moriarty PJ, Hansen, 2005), apresentando boa concordância.

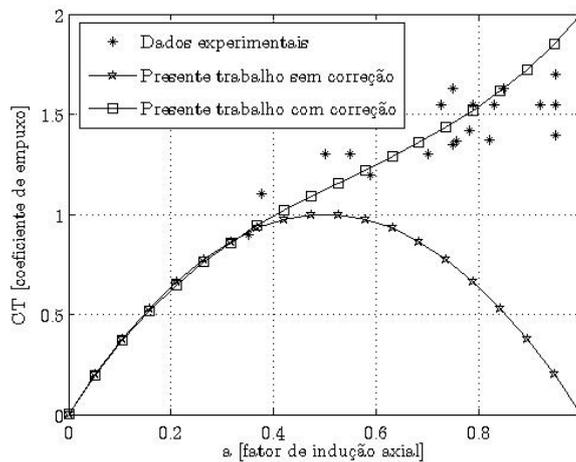


Figura 4. Comparação do modelo proposto com dados experimentais para $X = 4,0$.

O modelo proposto apresenta boa estabilidade numérica mesmo para valores de $X < 2$, Fig. 5.

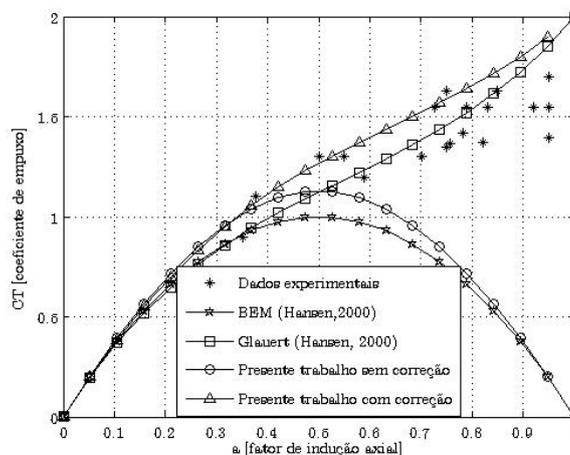


Figura 5. Resultado para $X = 1,5$.

A Eq. (11) mostra que, para $a > \frac{1}{3}$, o coeficiente de empuxo é corrigido, levando em consideração os valores de b . Como o coeficiente de empuxo no plano do rotor é

$$C_T = (1-a)^2 \frac{\sigma C_n}{\text{sen}^2 \phi} \quad (12)$$

dado por Hansen (2000), onde

$$\sigma = \frac{cB}{2\pi r} \quad (13)$$

$$C_n = C_L \cos \phi + C_D \text{sen} \phi \quad (14)$$

Igualando as Eqs. (11) e (12) para $a \leq \frac{1}{3}$

$$a = 1 - \frac{2bF \text{sen}^2 \phi}{\sigma C_n} \quad (15)$$

Se $a > \frac{1}{3}$

$$a = \frac{8 - 5k - \sqrt{k(32 - 23k)}}{2(4 - 3k)} \quad (16)$$

para

$$k = \frac{2bF \text{sen}^2 \phi}{\sigma C_n} \quad (17)$$

onde B é o número de pás, c a corda local, r o raio local, F a correção de Prandtl, C_L e C_D são os coeficientes de sustentação e arrasto, respectivamente, ϕ é o ângulo de escoamento dado pela Eq. (18).

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{V_0 (1-a)}{\Omega r (1+a')} \right] \quad (18)$$

Em que Ω é a velocidade angular. Para o cálculo de a' , tem-se

$$a' = \frac{2b' F \text{sen} \phi \cos \phi}{\sigma C_t} - 1 \quad (19)$$

onde

$$C_t = C_l \text{sen} \phi - C_d \cos \phi \quad (20)$$

A Eq. (19) pode ser verificada no trabalho de Mesquita e Alves (2000). Para a correção de Prandtl (Hibbs e Radkey, 1981), tem-se:

$$F = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} (e^{-f}) \quad (21)$$

com

$$f = \frac{B}{2} \cdot \frac{(R-r)}{r \operatorname{sen} \phi} \quad (22)$$

O procedimento iterativo para o cálculo dos fatores de indução considera conhecidos os parâmetros r , $c(r)$, $\beta(r)$, $C_L(\alpha)$, $C_D(\alpha)$ e V_0 dado da seguinte maneira:

- (i) Atribuem-se valores iniciais para a e a' . No presente trabalho $a = 1/3$ e $a' = 0,001$;
- (ii) Calculam-se b e b' com as Eqs. (8) e (9);
- (iii) Calcula-se o valor de ϕ com a Eq. (18);
- (iv) Determinam-se C_L e C_D a partir de $\alpha = \phi - \beta$. α é o ângulo de ataque e β o ângulo de torção;
- (v) Calculam-se a e a' , aplicando o método de Newton nas Eqs. (15) e (19), fazendo

$$\Psi(a) = -a + 1 - \frac{2bF \operatorname{sen}^2 \phi}{\sigma C_n} \quad (23)$$

$$\Pi(a') = -a' - 1 + \frac{2b'F \operatorname{sen} \phi \cos \phi}{\sigma C_t} \quad (24)$$

pois os fatores de indução na esteira dependem dos fatores de indução no plano do rotor, $b = b(a)$ e $b' = b'(a')$, desta forma

$$a_i = a_{i-1} - \frac{\Psi(a_{i-1})}{\frac{d\Psi(a_{i-1})}{da}} \quad (25)$$

$$a'_i = a'_{i-1} - \frac{\Pi(a'_{i-1})}{\frac{d\Pi(a'_{i-1})}{da'}} \quad (26)$$

- (vi) Aplica-se o modelo de Glauert modificado, Eq. (16);
- (vii) Verifica-se a convergência para a e a' . Se a tolerância não for alcançada, retornar ao passo (ii). Neste trabalho, a tolerância é considerada 10^{-3} .

O coeficiente de potência C_p é dado por Mesquita e Alves (2000), através da Eq. (27).

$$C_p = \frac{4}{X^2} \int_0^X (1 - aF) F b' x^3 dx \quad (27)$$

A potência de saída da turbina é dada por (Brasil Junior, 2006)

$$P = \frac{1}{2} C_p \rho A u^3 \quad (28)$$

onde u é a velocidade induzida no plano do rotor, Eq. (2).

3. RESULTADOS DO MODELO

O modelo proposto foi implementado na linguagem de programação FORTRAN. Os resultados foram gerados no *software* MATLAB, e são comparados com o método clássico do momento do elemento de pá BEM obtido no trabalho desenvolvido por Hansen (2000), onde o modelo proposto apresenta boa concordância. Sendo assim, foi considerada uma turbina hidrocínética com rotor de 1,2 m de diâmetro, rotação de 50 rpm, diâmetro de cubo 0,18 m e 5 pás, projetada, utilizando o código numérico implementado no presente trabalho. A massa específica da água foi considerada 997 kg/m^3 à 25°C (Fox, 2004).

A Fig. 6 mostra as distribuições de corda e ângulo de torção ao longo do raio, para um ângulo de ataque de 8° obtido de acordo com o trabalho de Vaz *et al* (2009a). Os parâmetros hidrodinâmicos para a determinação da pá

mostrada nas Figs. 7 e 8 foram obtidos utilizando o perfil da série NACA0012, que apresenta boas propriedades hidrodinâmicas e é conveniente ao projeto de máquinas axiais, segundo o trabalho de Rodrigues (2007).

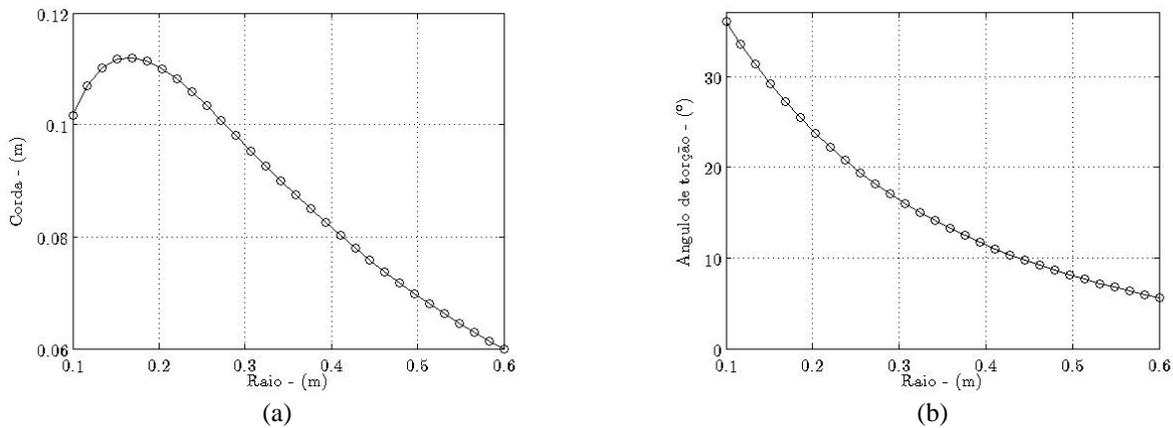


Figura 6. (a) Distribuição da corda. (b) Distribuição do ângulo de torção.

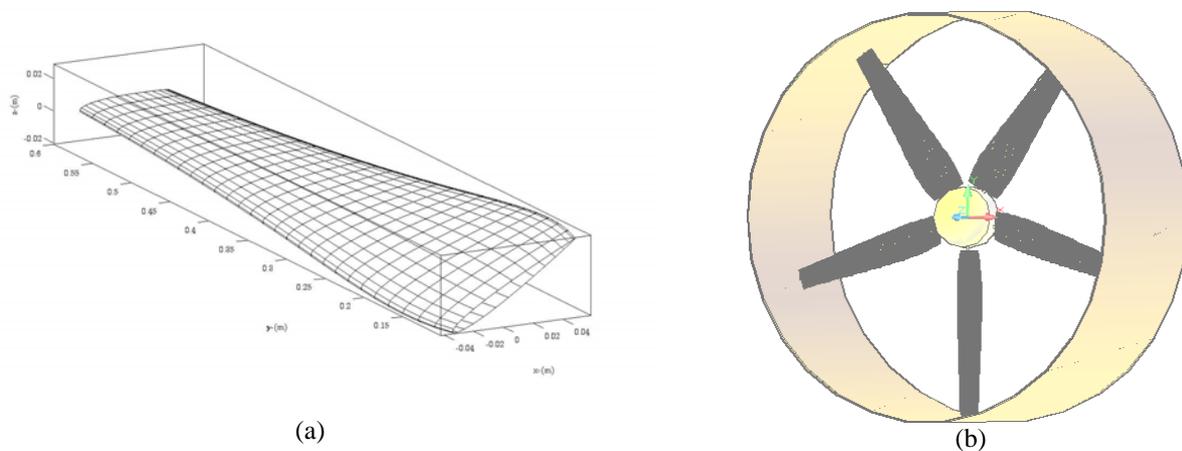


Figura 7. (a) Pá em 3D gerada via código numérico implementado neste trabalho. (b) Desenho em CAD do rotor projetado no presente trabalho com 5 pás.

A Fig. 8 apresenta a variação da razão de velocidade X e o coeficiente de potência, onde o modelo proposto se aproxima do método BEM clássico, principalmente para valores de X maiores que 3, onde o comportamento do rotor é dito rápido. Para valores de X menores que 3, a curva referente ao modelo proposto descola do método BEM, apresentando um comportamento previsto pelas equações matemáticas descritas acima, uma vez, que o coeficiente de potência é diretamente proporcional a b' , Eq. (27), e como b' , nessa região, corresponde a valores maiores que o dobro do fator de indução tangencial no plano do rotor a' , de acordo com a Fig. 2, a eficiência tende a aumentar.

A Fig. 9 apresenta a relação entre a velocidade e o coeficiente de potência. Observa-se que, para a pá projetada neste trabalho, a máxima eficiência é verificada para uma velocidade média em torno de 1 m/s, além de que, é perceptível a diferença entre as curvas para valores maiores que 1,3 m/s, a partir do qual o rotor passa a experimentar menores valores para X .

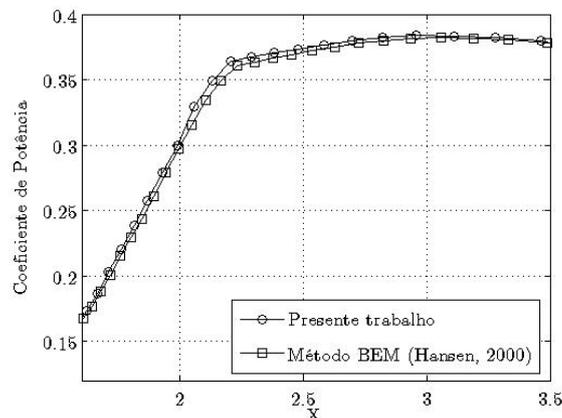


Figura 8. Curva de X em relação ao coeficiente de potência.

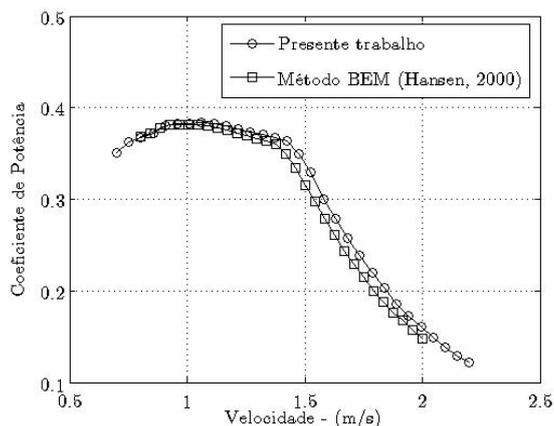


Figura 9. Curva da velocidade em relação ao coeficiente de potência.

A Fig. 10 mostra a curva de potência do rotor hidrocínético, onde a maior diferença entre os resultados é estabelecida para velocidades superiores a 1,3 m/s. Para tais valores, a potência calculada, utilizando o modelo proposto é maior que a obtida com o método BEM, o que era de se esperar, visto que, a potência varia com o cubo da velocidade, e nessa região, a eficiência da turbina projetada é maior para o modelo proposto do que a calculada com o método BEM.

Os resultados apresentados são iniciais, mas consideráveis. Como trabalhos futuros serão desenvolvidos comparações com outros rotores hidrocínéticos encontrados na literatura, assim como dados experimentais, que até então são escassos. Outro trabalho futuro é a implementação de rotinas para a correção dos coeficientes de sustentação e arrasto na região de descolamento hidrodinâmico da pá, assim como, implementar uma correção para o efeito de grade.

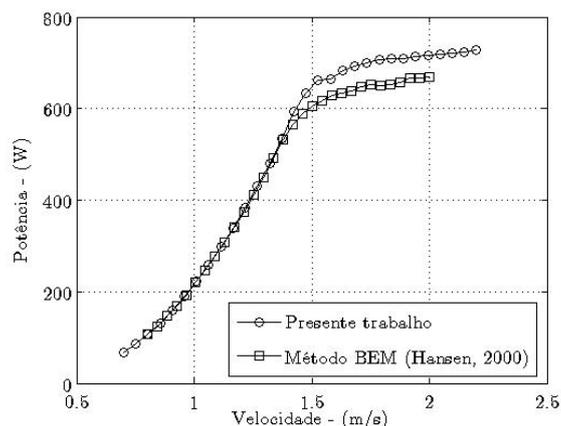


Figura 10. Curva da velocidade em relação à potência.

4. CONCLUSÕES

O modelo matemático apresentado neste trabalho corresponde a uma ferramenta alternativa para o projeto de rotores com múltiplas pás, uma vez, que em sua estrutura principal é pré- vista a equação mais geral que relaciona os fatores de indução no plano do rotor e na esteira (Eggleston e Stoddard, 1987), considerando a correção de Glauert (1926) e o modelo do momento do elemento de pá (Hansen, 2000), que aqui foram modificados com o propósito de atender as condições estabelecidas pelas Eqs. (3) e (5). As comparações desenvolvidas mostram que o modelo apresenta boa eficiência quando comparado com o método BEM clássico, e que pode ser utilizado no projeto de turbinas hidrocínéticas, principalmente devido às baixas velocidades do escoamento, comuns nos rios da Amazônia (Brasil Junior, 2006). A maior eficiência para o rotor projetado, corresponde a 38% com velocidade de 1,0 m/s e rotação de 50 rpm. Desta forma, para melhorar o desempenho do sistema mecânico, propõe-se o desenvolvimento de um estudo sobre os hidrofólios adequados às pás de um rotor hidrocínético, utilizando a metodologia desenvolvida no trabalho de Vaz *et al* (2009b).

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao MCT/CNPq/INCT-EREEA por uma bolsa DTI-3, a qual foi fundamental para o desenvolvimento do trabalho.

6. REFERÊNCIAS

- Brasil-Junior, A. C. P., Salomon, L. R. B., Els, R. V., Ferreira, W. O. (2006). A New Conception of Hydrokinetic Turbine of Isolated Communities in Amazon, IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Recife, Pernambuco, Brasil.
- Eggleston, D. M. and Stoddard, F. S. "Wind Turbine Engineering Design", Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1987.
- Fox, R.W., McDonald, A.T. and Pritchard, P.J.; "Introdução à Mecânica dos Fluidos", LTC, 6ª ed., 2004.
- Glauert H. The elements of airfoil and airscrew theory. Cambridge: Cambridge University Press; 1926.
- Hansen MOL. Documentation of code and airfoil data used for the NREL 10-m wind turbine. ROTABEMDTU, November 2000.
- Hibbs, B., Radkey, R. L., 1981, Small Wind Energy Conversion System Rotor Performance Model Comparison Study. Rockwell Int. Rocky Flats Plant, RFP-4074/13470/36331/81-0.
- Joukowski, N. E., *Travanx du Bureau des Calculs et Essais Aeronautiques de l'Ecole Superieure Technique de Moscou*, 1918.
- Mesquita, A. L. A. and Alves, A. S. G. (2000). An Improved Approach for Performance Prediction of HAWT Using Strip Theory, *Wind Engineering*, Vol. 24, No. 6.
- Moriarty PJ, Hansen AC. AeroDyn theory manual. Technical report NREL/TP-500-36881—January 2005.
- Rodrigues, A. P. de S. P., *Parametrização e Simulação Numérica da Turbina Hidrocinética – Otimização via Algoritmos Genéticos*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, 2007.
- Vaz, J. R. P., Silva, D. O., Mesquita, A. A, Lins, E. F., Pinho, J. T.. (2009a). Aerodynamic and Modal Analyses of Blades for Small Wind Turbines, 20th International Congress of Mechanical Engineering, Gramado, Rio Grande do Sul, Brazil.
- Vaz, J. R. P., Silva, D. O., Pinho, J. T., Branco, T. M. M., Mesquita, A. A. (2009b). Estudo da Eficiência de Perfis Aerodinâmicos Aplicados a Aerogeradores de Pequeno Porte, III Congresso Brasileiro de Eficiência Energética, Belém, Pará, Brasil.
- Wilson, R. E., Lissaman, P. B. S., 1974, *Applied Aerodynamics of Wind Power Machines*, Oregon State University, Report N° NSF-RA-N-74-113.