



INFLUÊNCIA DOS PARAMETROS DIMENSIONAIS DE UM ROBÔ MANIPULADOR 3R NO SEU ESPAÇO DE TRABALHO

Sidney Araujo Mendonça

Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Uberlândia
2160 João Naves de Ávila Av, Campus Santa Mônica,
CEP 38400-902, Uberlândia, Brasil
araujo_itba@yahoo.com.br

Antonio Dias Carrijo Neto

Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Uberlândia
tonycarrijo@yahoo.com.br

Sezimária de Fátima Pereira Saramago

Faculdade de Matemática
Universidade Federal de Uberlândia
saramago@ufu.br

Resumo: Este trabalho tem como objetivo determinar e analisar a influência dos parâmetros dimensionais no espaço de trabalho de um robô manipulador 3R ortogonal. É apresentada uma classificação para este tipo de manipulador baseada na topologia do seu espaço de trabalho, que depende dos pontos de singularidades. Assim, são definidos domínios do espaço de trabalho relacionados com o número de ponto de cúspides e também com o número de pontos de nós.

Palavras-chave: robótica, manipulador 3R, espaço de trabalho, ponto de cúspides, pontos de nós.

1. INTRODUÇÃO

Devido a grande importância dos robôs manipuladores para o desenvolvimento da sociedade moderna, as pesquisas científicas nesta área do conhecimento têm se desenvolvido cada vez mais. Atualmente, um dos principais objetos de estudo, no que se refere a robôs manipuladores, é o seu espaço de trabalho, definido pelo conjunto de pontos atingíveis pelo efetuador (Gupta e Ruth, 1982).

Um robô é um manipulador reprogramável e multifuncional, projetado para manipular material, peças, ferramentas ou dispositivos especializados, através de movimentos variados programados para o desempenho de uma variedade de tarefas (Bergamaschi, 2004). Nesta pesquisa pretende-se abordar o problema da identificação do espaço de trabalho de robôs manipuladores com três juntas rotacionais ortogonais. Este tipo de manipulador é classificado baseando-se na topologia do seu espaço de trabalho, que depende dos pontos de singularidades. Assim, são definidos domínios do espaço de trabalho relacionados com o número de ponto de cúspides e também com o número de pontos de nós. É apresentada uma formulação analítica para a obtenção dos pontos de singularidades e das curvas de separação dos diversos domínios do espaço de trabalho.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Um mecanismo do tipo manipulador serial é uma cadeia cinemática constituída de uma sucessão de corpos rígidos ligados entre si por articulações rotacionais ou prismáticas. Considere o sistema R_j fixo ao corpo C_j sucessor do corpo C_{j-1} e antecessor de C_{j+1} . A relação entre os sistemas R_{j-1} e R_j na maioria das vezes é dada em função dos parâmetros de Denavit-Hartenberger (DH) como ilustrado pela Figura 1. Estes parâmetros são definidos como: d_j é a distância entre Z_{j-1} e Z_j ao longo de X_{j-1} ; α_j o ângulo entre os eixos Z_{j-1} e Z_j correspondente a uma rotação ao redor de X_{j-1} ; r_j representa a distância entre X_{j-1} e X_j ao longo de Z_j e θ_j o ângulo entre os eixos X_{j-1} e X_j , correspondente a uma rotação ao redor de Z_j .

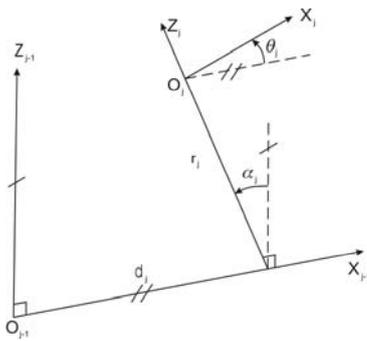


Figura 1: Parâmetros de Denavit-Hartenberg

$$T_j^{j-1} = \begin{pmatrix} c_j & -s_j & 0 & d_j \\ c\alpha_j s_j & c\alpha_j c_j & -s\alpha_j & -r_j s\alpha_j \\ s\alpha_j s_j & s\alpha_j c_j & c\alpha_j & r_j c\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

A relação entre dois sistemas de coordenadas consecutivos pode ser caracterizada pela matriz de transformação T_j^{j-1} , dada pela Equação (1), onde: $c_j = \cos(\theta_j)$, $s_j = \sin(\theta_j)$, $c\alpha_j = \cos(\alpha_j)$ e $s\alpha_j = \sin(\alpha_j)$.

O modelo geométrico direto (MGD) de um manipulador permite encontrar a posição e a orientação do efetuador em função dos parâmetros DH dados.

A determinação deste modelo se dá pela multiplicação das matrizes de transformação T_j^{j-1} entre o sistema R_{j-1} ligado ao corpo (j-1) e R_j ligado ao corpo (j), resultando na matriz de transformação T_n^0 tal que:

$$T_n^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot \dots \cdot T_j^{j-1} \cdot T_{j+1}^j \cdot \dots \cdot T_n^{n-1} \quad (2)$$

Nesta pesquisa, a classificação de uma família de manipuladores 3R ortogonais é baseada na topologia do espaço de trabalho, que é definida a partir dos pontos singulares que aparecem sobre os espaços de singularidade. Estes pontos particulares são os pontos de cúspides e de nós. Assim, são definidos domínios que contêm manipuladores com diferentes números de pontos de cúspide. A seguir, estes domínios são divididos em subdomínios de acordo com o número de nós.

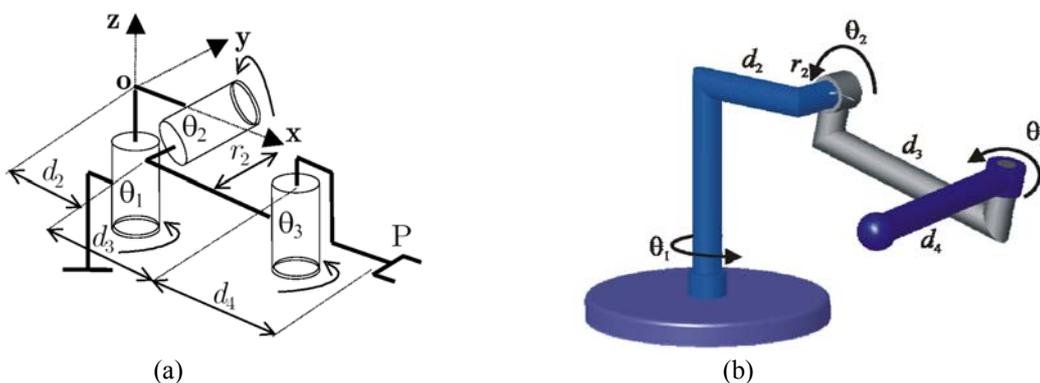


Figura 2: Manipulador 3R Ortogonal

A família estudada é composta de manipuladores com três juntas rotacionais, com eixos ortogonais ($\alpha_2 = -90^\circ$ e $\alpha_3 = 90^\circ$) e sem defasagem sobre o último eixo ($r_3 = 0$). O estudo deste tipo de manipulador é feito em função dos outros parâmetros DH que são: d_2 , d_3 , d_4 e r_2 . As três variáveis rotacionais consideradas são: θ_1 , θ_2 e θ_3 .

A Figura 2(a) representa a cadeia cinemática de um manipulador da família estudada na configuração zero.

Utilizando a matriz de transformação dada pela Equação 1, obtida pelo MGD, torna-se possível escrever a posição do efetuador em relação ao sistema inercial, fixo na base, como :

$$\begin{aligned} x &= [d_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2] c_1 - (r_2 + d_4 s_3) s_1 \\ y &= [d_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2] s_1 - (r_2 + d_4 s_3) c_1 \quad \text{e} \quad z = -(d_3 + d_4 c_3) s_2 \end{aligned} \quad (3)$$

O estudo da família de manipuladores baseia-se na topologia das superfícies de singularidades no espaço de trabalho. Estas singularidades são definidas como os lugares onde o determinante da matriz jacobiano se anula. Sendo que a matriz jacobiano J do manipulador pertencente a esta família e seu determinante é:

$$J = \begin{pmatrix} -s_3 c_2 d_4 - c_2 r_2 & 0 & -s_3 d_4 \\ s_3 s_2 d_4 + s_2 r_2 & d_3 + c_3 d_4 & 0 \\ c_2 d_3 + c_2 c_3 d_4 + d_2 & 0 & c_3 d_4 \end{pmatrix} \quad \det(J) = d_4 (d_3 + d_4 c_3) [d_2 s_3 + (d_3 s_3 + (d_3 s_3 - r_2 c_3) c_2)] \quad (4)$$

A topologia de uma superfície de singularidade no espaço de trabalho pode ser caracterizada pelo número de pontos de cuspide e de nós. Neste trabalho será mostrado que um manipulador pode ter 0, 2 ou 4 pontos de cuspide e 0, 1, 2, 3 ou 4 nós.

3. CLASSIFICAÇÃO SEGUNDO O NÚMERO DE PONTOS DE CÚSPIDES

Para ilustrar as diversas topologias de um manipulador em função do número de domínios, assim como de suas superfícies de separação, considere o caso onde r_2 é fixado, variando-se as grandezas d_4 em função de d_3 , conforme apresentado na Figura 3. Estas seções são divididas em varias zonas correspondentes a um mesmo número de pontos de cúspides.

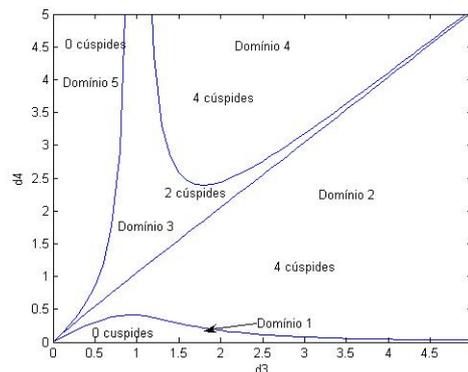


Figura 3: Partição do espaço de trabalho em função de d_3 e d_4 , para $r_2 = 0,7$

No caso da família de manipuladores estudados existem três grandes grupos, que correspondem a 0, 2 e 4 pontos de cúspide. Estes três casos são divididos em 5 domínios diferentes delimitados por 4 superfícies (C_1 , C_2 , C_3 e C_4) como é representado pela Figura 3. Além disso, observa-se claramente a existência de 2 zonas correspondentes a manipuladores tendo 4 pontos de cúspides (Domínio 2 e Domínio 4), uma zona correspondente a manipuladores contendo 2 pontos de cúspides (Domínio 3) e duas zonas correspondentes a manipuladores sem pontos de cúspides (Domínio 1 e Domínio 5).

Obviamente, para cada conjunto de valores dos parâmetros DH obtém-se um manipulador correspondente.

3.1 Apresentação dos domínios e das curvas de separação

O manipulador representado pela Figura 4 caracteriza o primeiro tipo de manipulador, conforme a classificação da Figura 3. Observa-se que se trata de um manipulador binário (os 4 tipos restantes são manipuladores quartenários) e que não possui pontos de cúspide. Além disso, contém uma cavidade toroidal que é delimitada pela envoltória interior.

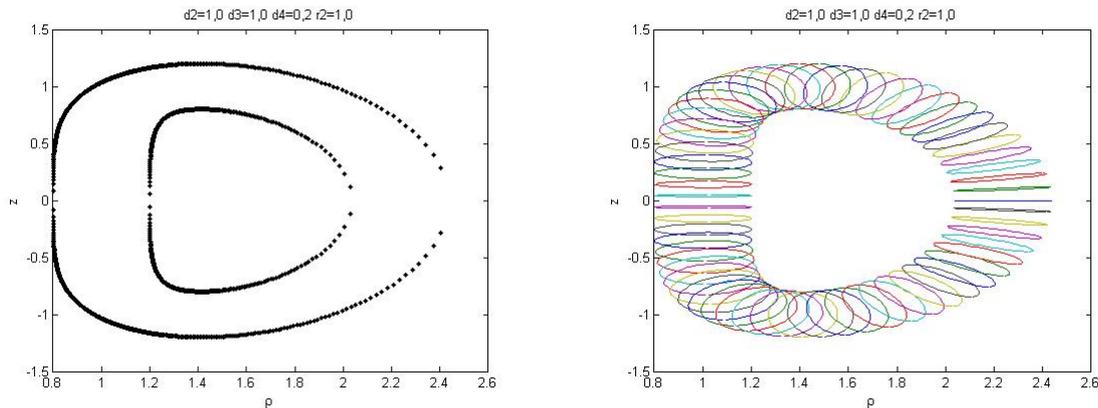


Figura 4: Manipulador do tipo 1: pertencente ao Domínio 1

A Figura 5 mostra a um manipulador quartenário, com 4 pontos de cúspide e corresponde ao Domínio 2. Neste caso, o espaço de trabalho do manipulador apresenta 4 pontos de cúspide, uma cavidade toroidal, duas zonas com 4 soluções e uma zona com 2 soluções no MGI.

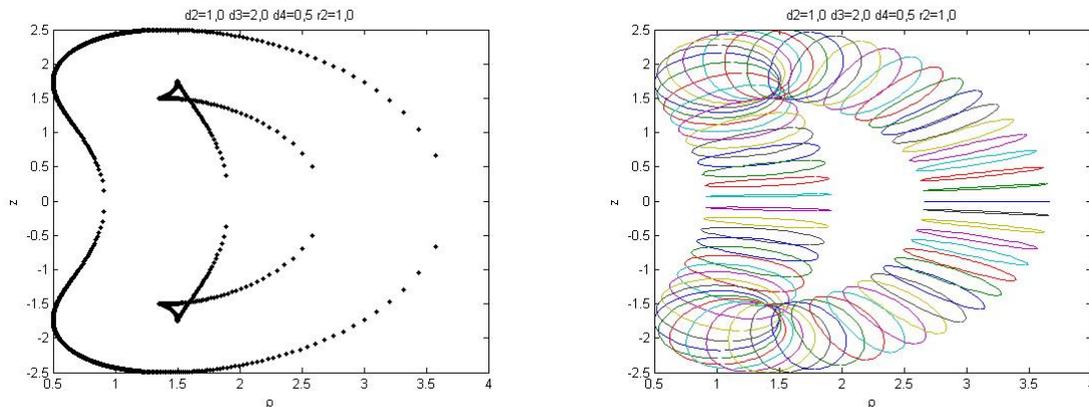


Figura 5: Manipulador do tipo 2: pertencente ao Domínio 2

A fim de determinar a equação da superfície de separação entre os manipuladores binários e quartenários, escreve-se a condição de existência de um ponto quádruplo a partir do polinômio do MGI de grau 4, obtido através do modelo geométrico inverso (MGI). Este polinômio pode ser escrito da forma:

$$P(t) = C_{01}t^4 + 4C_{11}t^3 + 6C_{21}t^2 + 4C_{31} + C_{41} = 0, \quad (5)$$

sendo que C_{01} , C_{11} , C_{21} , C_{31} e C_{41} estão em função de $t = \tan(\theta_3/2)$, z e dos parâmetros DH.

Considere uma família de manipuladores onde $\alpha_2 = -90^\circ$, $\alpha_3 = 90^\circ$, $d_2 = 1$ e $r_3 = 0$, então C_{01} , C_{11} , C_{21} , C_{31} e C_{41} são escritos:

$$\begin{aligned} C_{01} &= d_3^2 d_4^2 - d_3 d_4 V - R_{11} + \frac{V^2}{4} + r_2^2 ; & C_{11} &= \frac{d_4 r_2 (-2d_3 d_4 + V + 2)}{2} \\ C_{21} &= -\frac{d_3^2 d_4^2}{3} + \frac{2d_4^2 r_2^2}{3} + \frac{2d_4^2}{3} - \frac{R_{11}}{3} + \frac{V^2}{12} + \frac{r_2^2}{3} ; & C_{31} &= \frac{d_4 r_2 (2d_3 d_4 + V + 2)}{2} \\ C_{41} &= d_3^2 d_4^2 + d_3 d_4 V - R_{11} + \frac{V^2}{4} + r_2^2, & \text{onde } V &= -\rho^2 - z^2 - 1 + d_3^2 + r_2^2 + d_4^2 \text{ e } R_{11} = \rho^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Por $P(t)$ admitir uma raiz quadrupla, as três equações seguintes devem ser verificadas:

$$C_{01}C_{41} - C_{11}C_{31} = 0 ; \quad C_{01}C_{31} - C_{11}C_{21} = 0 ; \quad C_{01}C_{21} - C_{11}^2 = 0 \quad (7)$$

A fim de escrever uma condição dependente apenas dos parâmetros DH, deve-se eliminar V e R_{11} . Utilizando as ferramentas algébricas disponíveis em um software de cálculo simbólico, obtém-se o polinômio abaixo:

$$d_3^{12} d_4^2 r_2^4 Q_1 Q_2 Q_3 = 0 ; \text{ onde } Q_1, Q_2 \text{ e } Q_3 \text{ são três polinômios em função de } d_3, d_4 \text{ e } r_2. \quad (8)$$

Através da comparação destes 3 polinômios com as equações de Corvez (2002), que contém a superfície de separação dos manipuladores binários e quartenários, deduz-se que a única equação pertinente para a solução da Equação 8 é $Q_1=0$. Pode-se notar que esta equação em d_4 permite escrever a equação da superfície C_1 a seguir:

$$C_1 : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} ; \text{ onde, } A = \sqrt{(d_3 + 1)^2 + r_2^2} \text{ e } B = \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2} \quad (9)$$

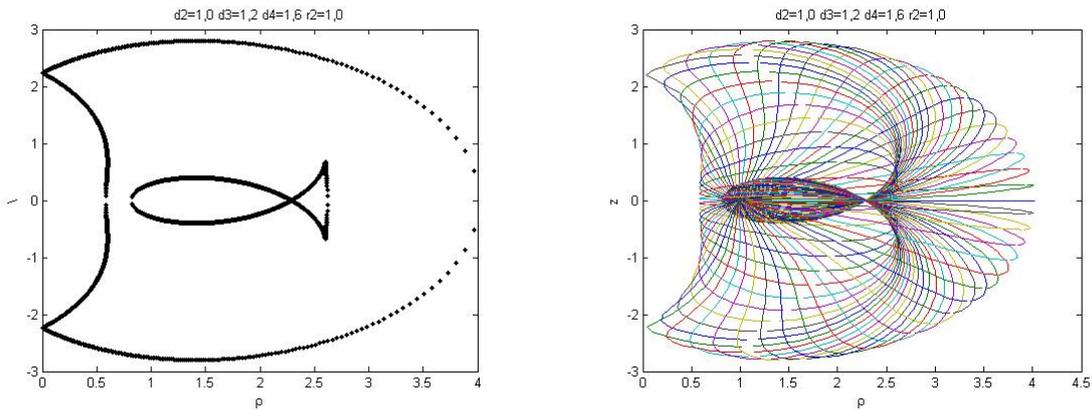


Figura 6: Manipulador do tipo 3: pertencente ao Domínio 3

O manipulador do tipo 3, que pertence ao Domínio 3 da Figura 3, é apresentado na Figura 6. Este manipulador tem 2 pontos de cuspide sobre a envoltória interior tendo a forma de um peixe. As duas zonas contidas na superfície de singularidade interior têm 4 soluções no MGI, contudo a zona delimitada pelas envoltórias interior e exterior é uma zona com 2 soluções.

O manipulador mostrado na Figura 7 é do tipo 4. No espaço de trabalho este manipulador possui 4 pontos de cuspide que são compartilhados pelas superfícies de singularidade interior e exterior.

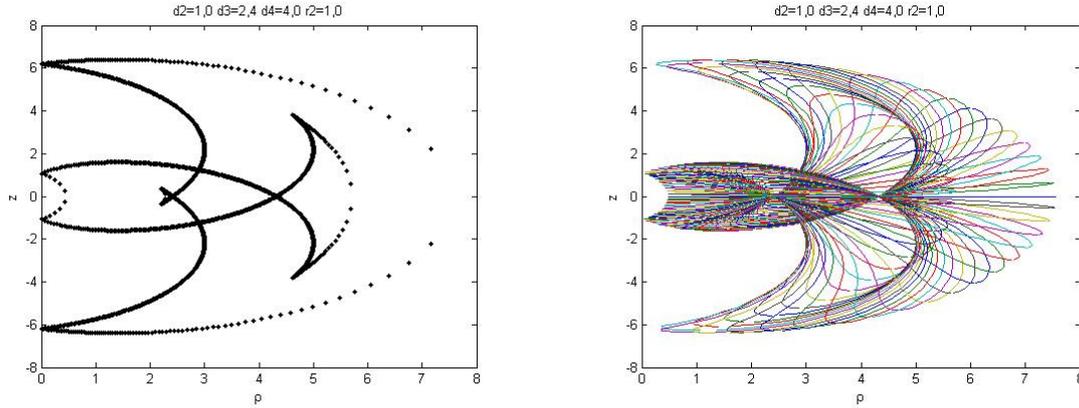


Figura 7: Manipulador do tipo 4: pertencente ao Domínio 4

A Figura 8 corresponde a um manipulador sem pontos de cúspide, pertencente ao Domínio 5. Ao contrário de um manipulador do tipo 1, a superfície de singularidade interior não é definida por uma cavidade toroidal mais sim por uma zona com 4 soluções no MGI.

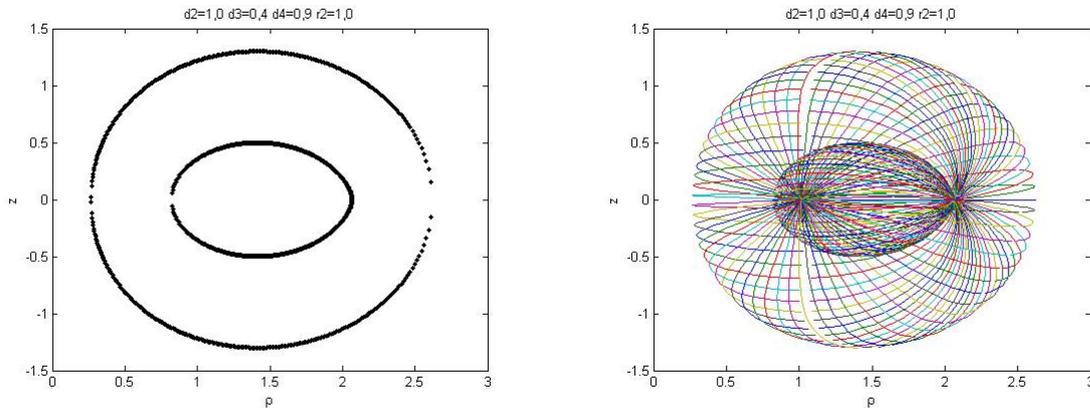


Figura 8: Manipulador do tipo 5: pertencente ao Domínio 5

Para obter as superfícies de separação dos domínios, definidos pelo número de pontos de cúspides, deve-se anular o determinante da matriz Jacobiano, representado pela Equação 4, resultando em um sistema com duas equações:

$$s_3 + (d_3 s_3 - r_3 c_3) c_2 = 0 ; d_3 + d_4 c_3 = 0 \tag{10}$$

Da equação $d_3 + c_3 d_4 = 0$, obtém-se

$$c_3 = -d_3/d_4 \text{ e } s_3 = \varepsilon \sqrt{1 - (d_3/d_4)^2} \text{ com } d_3 \leq d_4 \text{ e } \varepsilon = \pm 1. \tag{11}$$

Quando isola-se c_2 da primeira equação do Sistema 10 e substituí-se os valores de s_3 e c_3 dados em (11), resulta:

$$c_2 = - \frac{\varepsilon_1 \sqrt{1 - d_3/d_4}}{\left(\varepsilon_2 \sqrt{1 - (d_3/d_4)^2} \right) d_3 + (d_3/d_4) r_2} \tag{12}$$

A partir da Equação 12 e sabendo que $|c_2| \leq 1$, é possível obter as outras superfícies de separação apenas variando os valores de ε_1 e ε_2 . A curva C_2 representa a superfície de separação entre os domínios 2 e 3 (obtida com $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$); C_3 entre os domínios 3 e 4 (obtida com $\varepsilon_1 = 1$ e $\varepsilon_2 = -1$) e C_4 entre os domínios 3 e 5 (obtida com $\varepsilon_1 = -1$ e $\varepsilon_2 = 1$), sendo definidas por:

$$C_2 : d_4 = \frac{d_3}{1+d_3} A; \quad C_3 : d_4 = \frac{d_3}{d_3-1} B; \quad C_4 : d_4 = \frac{d_3}{1-d_3} B \quad (13)$$

4. CLASSIFICAÇÃO SEGUNDO O NÚMERO DE NÓS

Os pontos do espaço de trabalho que possuem 2 pares de solução cinemáticas inversas coincidentes são denominados nós. Todos os manipuladores que pertencem ao Domínio 1 não possuem pontos de cúspide ou pontos de nós e são denotados por WT_1 . Todos os manipuladores que pertencem ao Domínio 4 possuem 4 pontos de cúspide e 4 pontos de nós, sendo denotados por WT_7 .

Em relação aos Domínios 2, 3 e 5, estudados anteriormente, os mesmos serão subdivididos levando-se em conta o número de nós em cada região. Para tanto, são determinadas as superfícies de separação para as diferentes topologias do espaço de trabalho através da representação geométrica do manipulador.

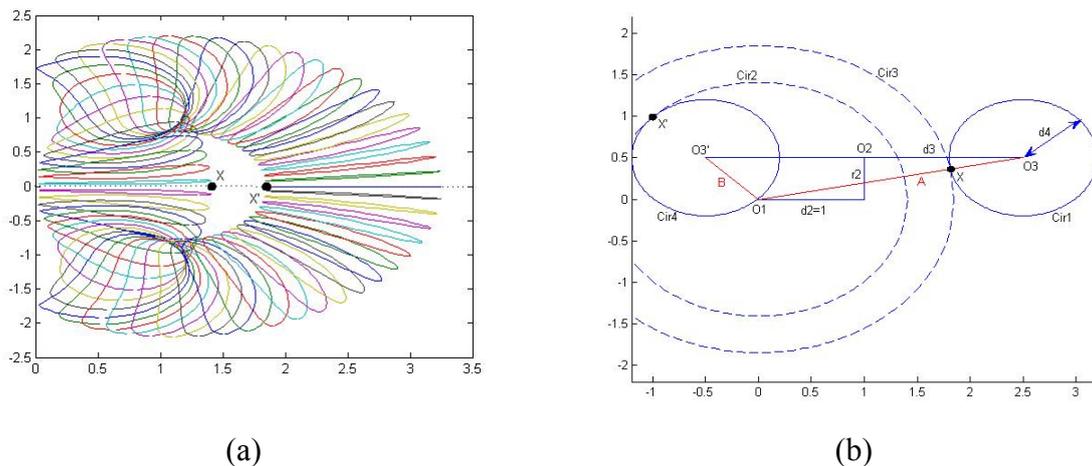
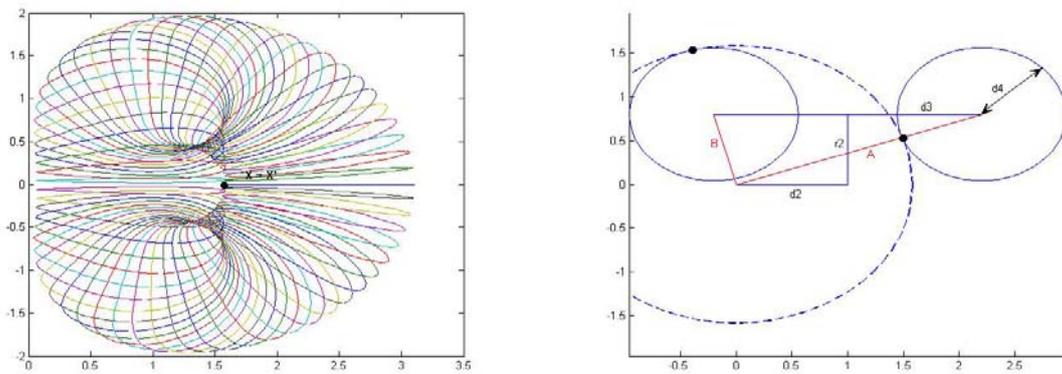
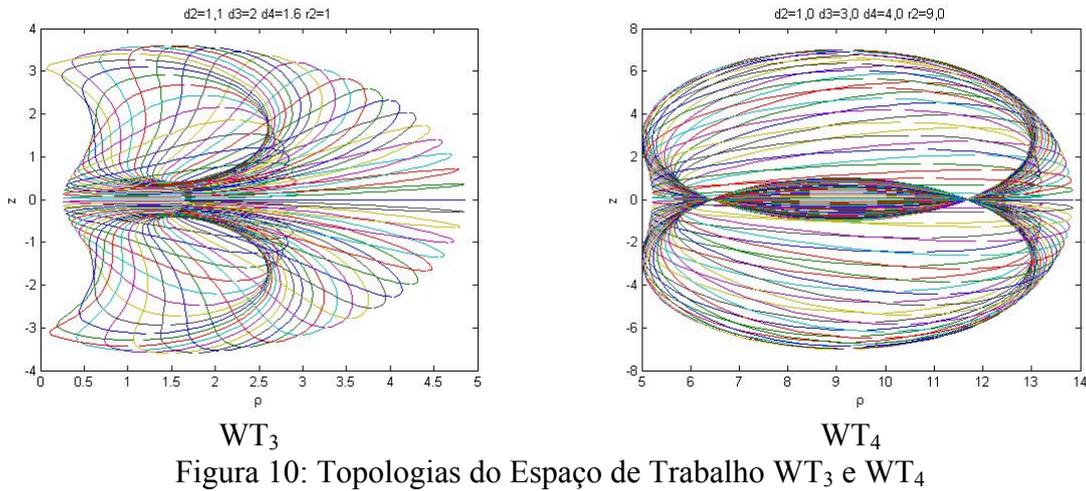


Figura 9: Representação de um manipulador e seu espaço de trabalho

A Figura 9(b) representa um manipulador com $\theta_1=0$, $\theta_2=0$ (à direita) e $\theta_2=180^\circ$ (à esquerda). Para a primeira configuração ($\theta_2=0$), efetua-se uma rotação de 360° em torno do eixo 3 passando por O_3 , desta forma, o caminho do efetuador é uma circunferência denominada Cir_1 . Seja X o ponto do efetuador mais próximo de O_1 , efetuando-se uma rotação de 360° do ponto X ao redor de O_1 , obtém-se um novo círculo de centro O_1 e de raio O_1X denominado Cir_3 . Para a segunda configuração ($\theta_2=180^\circ$), efetuando-se uma rotação de 360° em torno do eixo 3 passando por O_3' , o efetuador descreve um círculo de centro O_3' e de raio d_4 denotado por Cir_4 . Defini-se o ponto X' como o ponto mais distante de O_1 . Cir_2 é a rotação do ponto X' ao redor de O_1 . Sobre a Figura 9(a) representa-se os pontos X e X' numa seção do espaço de trabalho a fim de ter a correspondência com a Figura 9(b).

Os manipuladores pertencentes ao Domínio 2 apresentam 4 pontos de cúspide, porém o número de nós é variado (0 ou 2 nós). A Figura 5 apresenta um manipulador deste domínio com dois nós e com região toroidal (WT_2). Denomina-se WT_3 os manipuladores do Domínio 2 que não apresentam nós. A notação WT_4 representam manipuladores deste domínio que apresentam 2 nós, mas não possuem região toroidal, conforme mostrado na Figura 10.



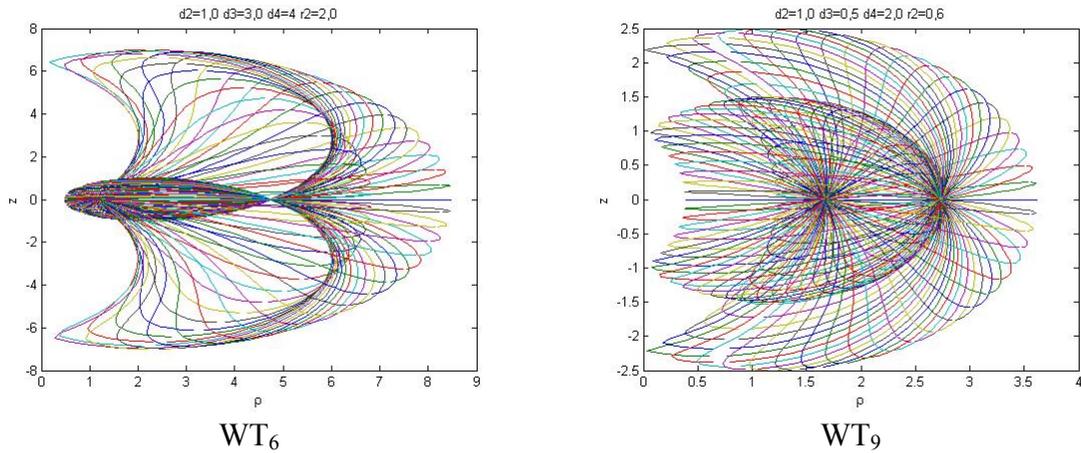
A transição entre WT₂ e WT₃ é representada pela Figura 11. A análise desta representação gráfica permite deduzir a equação da superfície de separação E₁:

$$E_1 : d_4 = \frac{1}{2} \cdot (A - B) \tag{14}$$

Já os manipuladores, no Domínio 2, cuja topologia do espaço de trabalho pertence a WT₃ são obtidos para $d_4 > d_3$.

$$E_2 : d_4 = d_3 \tag{15}$$

Os manipuladores do Domínio 3 possuem 2 pontos de cúspide e 1 ponto de nó (WT₅) sendo representado na Figura 6. Os manipuladores pertencentes ao Domínio 5, mostrados na Figura 8, não possuem pontos de cúspide ou de nós (WT₈). Observa-se, para os dois casos, que não existe região toroidal e que a superfície de singularidade interior está inteiramente contida na superfície de singularidade exterior. Para estes dois tipos citados, se a envoltória interna interceptar a superfície de singularidade exterior, faz com que surjam dois nós, como visto na Figura 12. Assim, o Domínio 3 passa a ter 2 pontos de cúspide e 3 pontos de nó (WT₆) e o Domínio 5 possui 0 ponto de cúspide e 1 ponto de nó (WT₉).



WT₆ WT₉
 Figura 12: Topologias do Espaço de Trabalho WT₆ e WT₉

A transição entre WT₈ e WT₉, que é análoga à transição entre WT₅ e WT₆, é representada pela Figura 13. Através da análise desta representação gráfica do manipulador é possível obter a superfície de separação E₃:

$$E_3 : d_4 = \frac{1}{2} \cdot (A + B) \tag{16}$$

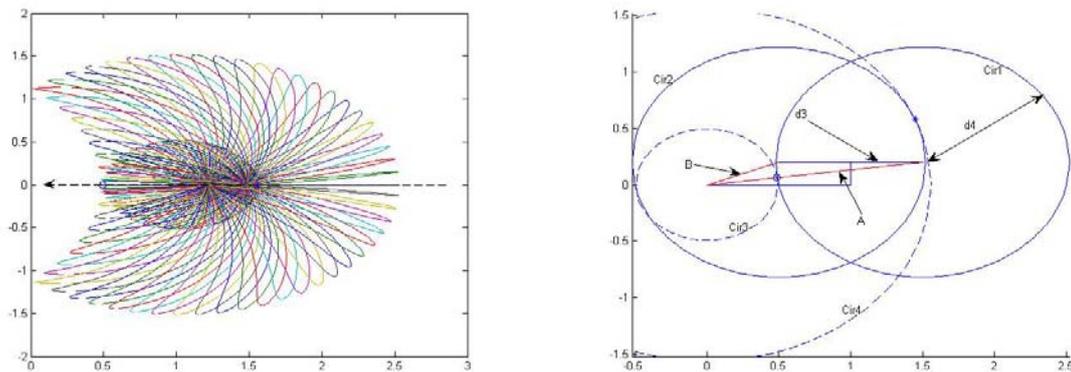


Figura 13: Transição entre WT₈ e WT₉ (análoga à transição entre WT₅ e WT₆)

5. DISCUSSÃO

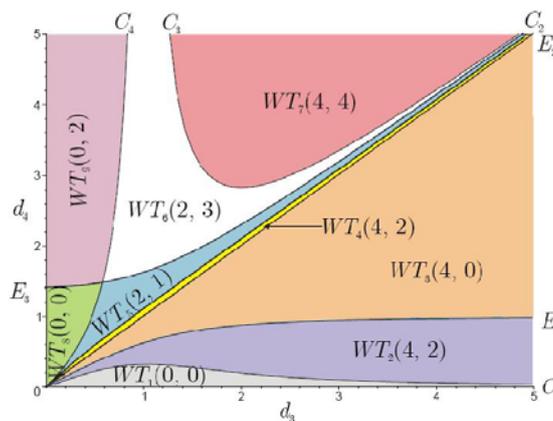


Figura 14: Topologias do Espaço de Trabalho para r₂=1, d₂=1 e r₃=0.

Assim, por meio da análise algébrica e geométrica desenvolvida, tornou-se possível classificar a topologia do espaço de trabalho para o manipulador 3R ortogonal, conforme apresentado na Figura 14.

Neste diagrama, podem-se observar todas as curvas de separação das diferentes topologias do espaço de trabalho do robô estudado, classificado segundo o número de pontos de cúspide (C_1 , C_2 , C_3 e C_4) e do número de pontos de nós (E_1 , E_2 e E_3).

Através da análise do diagrama é possível escolher os parâmetros de um robô manipulador a ser construído, de forma que melhor se adapte às características de funcionamento desejadas.

5. CONCLUSÃO

Através da análise da topologia do manipulador em estudo, que resultou nas curvas de separação dos domínios, tornou-se possível verificar a influência dos parâmetros dimensionais no seu espaço de trabalho.

Em trabalhos futuros, conhecendo-se as curvas de separação das diversas topologias, estas relações entre os parâmetros dimensionais podem ser utilizadas como restrições em um problema de otimização. Assim, pode-se obter o projeto ótimo de um manipulador, atendendo aos requisitos desejados pelo usuário final.

6. AGRADECIMENTOS

Os dois primeiros autores agradecem ao Programa de Ensino Tutorial (PET) da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU. A terceira autora agradece à Fapemig pelo suporte parcial desta pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

- Corvez, S.; Rouillier, F. 2002. Using computer algebra tools to classify serial manipulators. Proceedings Fourth International Workshop on Automated Deduction in Geometry, Linz.
- Gupta, K. C.; Roth, B. 1982. Design Considerations for Manipulator Workspace. ASME, Journal of Mechanical Design, v. 104, p. 704-711
- Bergamaschi, P. R. 2004. Projeto Ótimo de Robôs Manipuladores 3R, Considerando as Características de seu Espaço de Trabalho. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

INFLUENCE OF THE DIMENSIONAL PARAMETERS OF A ROBOT MANIPULATOR 3R IN THE WORKSPACE

Sidney Araujo Mendonça

Faculdade de Engenharia Mecânica - UFU
araujo_itba@yahoo.com.br

Antonio Dias Carrijo Neto

Faculdade de Engenharia Mecânica -UFU
tonycarrijo@yahoo.com.br

Sezimária de Fátima Pereira Saramago

Faculdade de Matemática - UFU
saramago@ufu.br

Abstract: *The objective of this work is to determine and to analyze the influence of the dimensional parameters in the workspace of a robot's manipulator 3R. A classification is presented for this manipulator type based in the topology of its workspace that depends on the points of singularities. Thus, it is defined domains of the workspace related with the number of cusp points and also with the number of node points.*

Keywords: *robotics, 3R manipulator, workspace, cusp point, node point.*