

# SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIA EM PLACAS PLANAS MULTICOMPOSTAS

**Ivanilda B. Aseka** - iaseka@vortex.ufrgs.br

Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Matemática  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Minas,  
Metalúrgica e de Materiais - PPGEM  
Osvaldo Aranha, 99/613 - 90035-190, Porto Alegre, RS, Brasil

**Marco T. Vilhena** - vilhena@cesup.ufrgs.br

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática  
PPGEM

**Paulo O. Beyer** - pob@mecanica.ufrgs.br

**Marcus V. A. Bianchi** - bianchi@mecanica.ufrgs.br

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Engenharia Mecânica  
Cx. P. 17819 - 90035-972 - Porto Alegre, RS, Brasil

**Resumo.** Neste trabalho é apresentado um método semi-analítico para solução de problemas de transferência de calor bidimensional, em regime não-estacionário em planos multicamadas. Esse método consiste na aplicação do método nodal combinado com a técnica da transformada de Laplace, o que permite encontrar expressões na forma analítica para as temperaturas médias transformadas e para a temperatura transformada na fronteira.

**Palavras-chave:** Semi-analítico, Condução não-estacionária, Meio multicamada

## 1. INTRODUÇÃO

A transferência de calor através de superfícies consistindo de várias camadas com propriedades físicas diferentes ocorre em muitas situações práticas. Um exemplo de aplicação bastante conhecido é em paredes de edificações, que usualmente são constituídas por camadas de diferentes materiais. Vários métodos têm sido utilizados para a análise de tais problemas: a técnica da expansão ortogonal e função de Green (Feijoo & Ramkrishna, 1979; Ozisik, 1980; Hou *et al.*, 1993); a técnica da solução adjunta (Antonopoulos & Vrachopoulos, 1997); a técnica da transformada integral clássica (Mikhailov *et al.*, 1983; Ozisik, 1980); a técnica da transformada de Laplace (Carslaw & Jaeger, 1959; Ozisik, 1980; Zedan & Mujahid, 1993). Uma revisão bibliográfica mais detalhada sobre esses e outros

métodos usados para solucionar esse tipo de problema pode ser encontrada em Beyer (1998).

Recentemente, foi desenvolvido por Beyer (1998) um método semi-analítico que utiliza a técnica da transformada de Laplace com inversão numérica para calcular o fluxo de calor transiente uni e bidimensional em paredes externas de edificações. No problema bidimensional, foi feita a integração transversa da equação do calor em apenas uma variável, obtendo uma equação diferencial unidimensional dependente do tempo. Para aproximar a temperatura na fronteira na outra variável, Beyer usou técnicas de interpolação polinomial.

Com o objetivo de eliminar a necessidade de interpolação polinomial, neste trabalho é feita a integração transversa da equação da transferência de calor bidimensional, transiente, tanto na variável  $x$  como na variável  $y$ . Desse modo, são geradas duas equações diferenciais acopladas, unidimensionais, dependentes do tempo para temperaturas médias, que são conhecidas como equações nodais, e aqui resolvidas com a aplicação da transformada de Laplace.

Esse procedimento, além de eliminar a necessidade de interpolação polinomial, permite encontrar expressões em forma analítica das temperaturas médias transformadas nas duas direções, da temperatura transformada na fronteira e conseqüentemente, os respectivos fluxos de calor.

## 2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considere um meio composto consistindo de  $n$  camadas paralelas em contato como ilustrado na Fig. 1. Assume-se que não há resistência de contato nas interfaces e que nos contornos externos o calor é transferido por convecção. Sejam  $h_1$ ,  $h_{n+1}$ ,  $h_{n+2}$  e  $h_{n+3}$  os coeficientes de transferência de calor nas fronteiras  $x = x_1$ ,  $x = x_{n+1}$ ,  $y = y_1$  e  $y = y_2$ , respectivamente. Cada camada é homogênea, isotrópica e tem propriedades físicas ( $\rho_i$ ,  $c_{p_i}$  e  $k_i$ ) constantes em cada meio e diferentes em camadas adjacentes. Inicialmente, cada camada está à temperatura  $T_i(x, y, 0) = F_i(x, y)$  em  $x_i < x < x_{i+1}$ ,  $y_1 < y < y_2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Para um tempo  $t > 0$ , os contornos estão sujeitos às temperaturas:  $T_a(t)$  à esquerda;  $T_b$  à direita;  $T_c$  em  $y = y_1$  e  $T_d(t)$  em  $y = y_2$ . As temperaturas  $T_a(t)$  e  $T_d(t)$  são variáveis com o tempo,  $T_b$  e  $T_c$  são constantes. Não há geração de calor no meio. A formulação matemática desse problema de condução de calor governado pela distribuição de temperatura  $T_i(x, y, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , para  $t > 0$  é dada por:

$$\frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial t} \quad (1)$$

em  $x_i < x < x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $y_1 < y < y_2$ , e para  $t > 0$ . Onde  $\alpha_i = \frac{k_i}{\rho_i c_i}$  é a difusividade térmica.

Essa equação está sujeita às condições de contorno em  $x$ , para  $t > 0$

$$\left. \begin{aligned} -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=x_1} &= h_1 [T_a(t) - T_1(x_1, y, t)] \\ k_n \frac{\partial T_n}{\partial x} \Big|_{x=x_{n+1}} &= h_{n+1} [T_b - T_n(x_{n+1}, y, t)] \end{aligned} \right\} y_1 \leq y \leq y_2, \quad (1a)$$

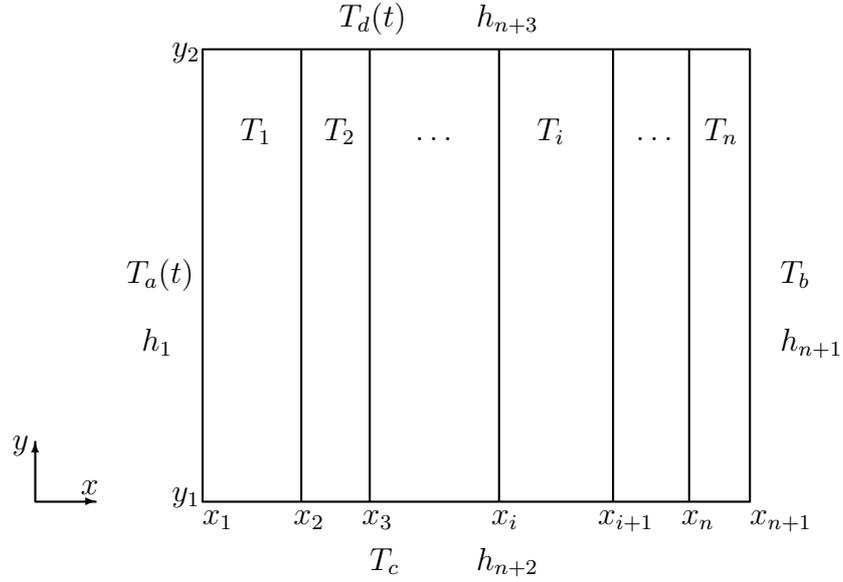


Figura 1: Meio multicamadas

às condições de contorno em  $y$  para  $t > 0$

$$\left. \begin{aligned} -k_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_{y=y_1} &= h_{n+2}[T_c - T_i(x, y_1, t)] \\ k_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_{y=y_2} &= h_{n+3}[T_d(t) - T_i(x, y_2, t)] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1b)$$

e às condições de interface em  $x = x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$  e para  $t > 0$

$$\left. \begin{aligned} T_i(x_{i+1}, y, t) &= T_{i+1}(x_{i+1}, y, t) \\ k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1}} &= k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1}} \end{aligned} \right\} y_1 \leq y \leq y_2, \quad (1c)$$

e a condição inicial

$$T_i(x, y, 0) = F_i(x, y), \quad \text{em } y_1 < y < y_2, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1d)$$

As condições de interface Eq. (1c) mostram a continuidade da temperatura e do fluxo de calor nas interfaces  $x = x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ . Esse problema tem  $4n$  condições de contorno.

### 3. EQUAÇÕES NODAIS

Integrando a Eq. (1) em  $y$ , entre os limites  $y_1$  e  $y_2$ , e dividindo por  $(y_2 - y_1)$ , resulta a seguinte equação diferencial parcial em  $x$  e  $t$

$$\frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} + S_i(x, t) \quad (2)$$

sendo

$$\tau_i(x, t) = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} T_i(x, y, t) dy \quad (3)$$

e

$$S_i(x, t) = \frac{1}{y_2 - y_1} \left[ \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_{y=y_1} - \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_{y=y_2} \right]. \quad (4)$$

Observa-se que  $\tau_i(x, t)$  é a temperatura média na direção  $y$  em cada meio  $i$ . Nota-se também que os termos que compõe  $S_i(x, t)$ , Eq. (4), representam os fluxos de calor nos contornos  $y = y_1$  e  $y = y_2$ .

As condições de contorno em  $x$ , para  $t > 0$ , ficam:

$$\begin{aligned} -k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \Big|_{x=x_1} &= h_1 [T_a(t) - \tau_1(x_1, t)], \\ k_n \frac{\partial \tau_n}{\partial x} \Big|_{x=x_{n+1}} &= h_{n+1} [T_b - \tau_n(x_{n+1}, t)] \end{aligned} \quad (2a)$$

e as condições de contorno em  $y$  permanecem as mesmas, não sendo necessário repeti-las aqui. As condições de interface para  $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$  são:

$$\begin{aligned} \tau_i(x_{i+1}, t) &= \tau_{i+1}(x_{i+1}, t), \\ k_i \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1}} &= k_{i+1} \frac{\partial \tau_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1}}, \end{aligned} \quad (2b)$$

e, finalmente, a condição inicial em  $x_i < x < x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , torna-se:

$$\tau_i(x, 0) = G_i(x), \quad \text{sendo} \quad G_i(x) = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} F_i(x, y) dy. \quad (2c)$$

Agora procedendo de forma análoga à anterior, ou seja, integrando a Eq. (1) em  $x$ , entre os limites  $x_i$  e  $x_{i+1}$ , e dividindo por  $(x_{i+1} - x_i)$ , obtem-se a seguinte equação diferencial parcial nas variáveis  $y$  e  $t$ ,

$$\frac{\partial^2 \eta_i(y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \eta_i(y, t)}{\partial t} + U_i(y, t) \quad (5)$$

sendo,

$$\eta_i(y, t) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} T_i(x, y, t) dx \quad (6)$$

e

$$U_i(y, t) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \left[ \frac{\partial T_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i} - \frac{\partial T_i}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1}} \right]. \quad (7)$$

Similar ao caso anterior  $\eta_i(y, t)$  é a temperatura média na direção  $x$  em cada meio  $i$  e os termos que compõe  $U_i(y, t)$  representam os fluxos de calor nos contornos  $x$  e interfaces. As condições de contorno em  $y$  são agora dadas por:

$$\begin{aligned} -k_i \frac{\partial \eta_i}{\partial y} \Big|_{y=y_1} &= h_{n+2}[T_c - \eta_i(y_1, t)], \\ k_i \frac{\partial \eta_i}{\partial y} \Big|_{y=y_2} &= h_{n+3}[T_d(t) - \eta_i(y_2, t)]. \end{aligned} \quad (5b)$$

As condições de interface para  $i = 1, 2, \dots, (n-1)$  e as condições de contorno em  $x$  permanecem as mesmas. A condição inicial, em  $y_1 < y < y_2$  e para  $i = 1, 2, \dots, n$  são:

$$\eta_i(y, 0) = H_i(y), \quad \text{sendo} \quad H_i(y) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_i(x, y) dx. \quad (5c)$$

As equações diferenciais unidimensionais, Eq. (2) e Eq. (5), geradas com a integração transversa da equação original, são conhecidas como equações nodais.

#### 4. APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Os dois problemas obtidos com as integrações transversas (em relação à variável  $x$  e  $y$ ) são descritos por um sistema de equações diferenciais unidimensionais, Eq. (2) e Eq. (5) e estão sujeitos às condições de contorno, acima especificadas. A técnica da transformada de Laplace é adotada com o objetivo de resolver essas equações, no domínio  $s$ , para as temperaturas médias  $\bar{\tau}_i(x, s)$  e  $\bar{\eta}_i(y, s)$ .

A transformada de Laplace da Eq. (2) é

$$\frac{d^2 \bar{\tau}_i(x, s)}{dx^2} - \frac{s}{\alpha_i} \bar{\tau}_i(x, s) = -\frac{G_i(x)}{\alpha_i} + \bar{S}_i(x, s) \quad (8)$$

onde  $\bar{\tau}_i(x, s)$  é a transformada de Laplace de  $\tau_i(x, t)$ ,  $\tau_i(x, 0) = G_i(x)$  conforme a condição inicial, e

$$\bar{S}_i(x, s) = \frac{1}{y_2 - y_1} \left[ \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial y} \Big|_{y=y_1} - \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial y} \Big|_{y=y_2} \right]. \quad (9)$$

A solução da Eq. (8), pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i(x, s) &= A_i(s)e^{-R_i x} + B_i(s)e^{R_i x} - \frac{e^{-R_i x}}{2R_i} \int_{x_i}^x e^{R_i \xi} \left[ \frac{-G_i(\xi)}{\alpha_i} + \bar{S}_i(\xi, s) \right] d\xi \\ &\quad + \frac{e^{R_i x}}{2R_i} \int_{x_i}^x e^{-R_i \xi} \left[ \frac{-G_i(\xi)}{\alpha_i} + \bar{S}_i(\xi, s) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $e^{-R_i x}$  e  $e^{R_i x}$  são funções linearmente independentes e  $R_i = \sqrt{\frac{s}{\alpha_i}}$ .

A transformada de Laplace das condições de contorno em  $x$  são:

$$\begin{aligned} -k_1 \frac{d\bar{\tau}_1}{dx} \Big|_{x=x_1} + h_1 \bar{\tau}_1(x_1, s) &= h_1 \bar{T}_a(s), \\ k_n \frac{d\bar{\tau}_n}{dx} \Big|_{x=x_{n+1}} + h_{n+1} \bar{\tau}_n(x_{n+1}, s) &= h_{n+1} \frac{T_b}{s}. \end{aligned} \quad (8a)$$

A transformada de Laplace da condição de contorno em  $y = y_1$  e  $y = y_2$  é:

$$\begin{aligned} -k_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial y} \Big|_{y=y_1} + h_{n+2} \bar{T}_i(x, y_1, s) &= h_{n+2} \frac{T_c}{s}, \quad i = 1, \dots, n \\ k_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial y} \Big|_{y=y_2} + h_{n+3} \bar{T}_i(x, y_2, s) &= h_{n+3} \bar{T}_d(s), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8b)$$

e as condições de interface transformadas para  $i = 1, 2, \dots, (n-1)$  são:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i(x_{i+1}, s) &= \bar{\tau}_{i+1}(x_{i+1}, s), \\ k_i \frac{d\bar{\tau}_i}{dx} \Big|_{x=x_{i+1}} &= k_{i+1} \frac{d\bar{\tau}_{i+1}}{dx} \Big|_{x=x_{i+1}}. \end{aligned} \quad (8c)$$

Agora, seguindo o mesmo raciocínio para a equação de  $\eta_i(y, t)$ , a transformada de Laplace da Eq. (5) é:

$$\frac{d^2 \bar{\eta}_i(y, s)}{dy^2} - \frac{s}{\alpha_i} \bar{\eta}_i(y, s) = -\frac{H_i(y)}{\alpha_i} + \bar{U}_i(y, s), \quad (11)$$

onde  $\bar{\eta}_i(y, s)$  é a transformada de Laplace de  $\eta_i(y, t)$ ,  $\eta_i(y, 0) = H_i(y)$  conforme a condição inicial e,

$$\bar{U}_i(y, s) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \left[ \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i} - \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1}} \right]. \quad (12)$$

A solução da Eq. (11) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_i(y, s) &= C_i(s) e^{-R_i y} + D_i(s) e^{R_i y} - \frac{e^{-R_i y}}{2R_i} \int_{y_i}^y e^{R_i \xi} \left[ \frac{-H_i(\xi)}{\alpha_i} + \bar{U}_i(\xi, s) \right] d\xi \\ &\quad + \frac{e^{R_i y}}{2R_i} \int_{y_i}^y e^{-R_i \xi} \left[ \frac{-H_i(\xi)}{\alpha_i} + \bar{U}_i(\xi, s) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (13)$$

onde  $e^{-R_i y}$  e  $e^{R_i y}$  são funções linearmente independentes.

A transformada de Laplace das condições de contorno em  $x$  são:

$$\begin{aligned}
-k_1 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial x} \Big|_{x=x_1} + h_1 \bar{T}_1(x_1, y, s) &= h_1 \bar{T}_a(s), \\
k_n \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial x} \Big|_{x=x_{n+1}} + h_{n+1} \bar{T}_n(x_{n+1}, y, s) &= h_{n+1} \frac{T_b}{s}.
\end{aligned} \tag{11a}$$

A transformada de Laplace das condições de contorno em  $y$  são:

$$\begin{aligned}
-k_i \frac{d\bar{\eta}_i}{dy} \Big|_{y=y_1} + h_{n+2} \bar{\eta}_i(y_1, s) &= h_{n+2} \frac{T_c}{s}, \quad i = 1, \dots, n \\
k_i \frac{d\bar{\eta}_i}{dy} \Big|_{y=y_2} + h_{n+3} \bar{\eta}_i(y_2, s) &= h_{n+3} \bar{T}_d(s). \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{11b}$$

E finalmente, as condições de interface transformadas para  $i = 1, 2, \dots, (n-1)$  são:

$$\begin{aligned}
\bar{T}_i(x_{i+1}, y, s) &= \bar{T}_{i+1}(x_{i+1}, y, s), \\
k_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1}} &= k_{i+1} \frac{\partial \bar{T}_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x_{i+1}}.
\end{aligned} \tag{11c}$$

Os  $4n$  coeficientes desconhecidos, a saber,  $A_i, B_i, C_i$  e  $D_i$ , (Eq. (10) e Eq. (13)), são determinados com o uso das condições de contorno dadas acima, e para os dois termos,  $\bar{S}_i(x, s)$  e  $\bar{U}_i(y, s)$  também desconhecidos, é proposta a expansão descrita a seguir.

## 5. SOLUÇÃO NODAL

A solução do problema homogêneo associado ao problema (8) fornece a base  $\{e^{-R_i x}, e^{R_i x}\}$ . Dessa forma, os fluxos de calor nos contornos  $y_1$  e  $y_2$  podem ser escritos em termos dos elementos da base como:

$$\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial y} \Big|_{y=y_1} = a_i(s)e^{-R_i x} + b_i(s)e^{R_i x} \tag{14}$$

e

$$\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial y} \Big|_{y=y_2} = c_i(s)e^{-R_i x} + d_i(s)e^{R_i x}. \tag{15}$$

De forma análoga, a solução do problema homogêneo associado ao problema (11) fornece a base  $\{e^{-R_i y}, e^{R_i y}\}$ . Sendo assim, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = u_i(s)e^{-R_i y} + v_i(s)e^{R_i y} \tag{16}$$

e

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial x} \right|_{x=x_{i+1}} = z_i(s)e^{-R_i y} + w_i(s)e^{R_i y}. \quad (17)$$

Substituindo-se as Eqs. (14) e (15) na Eq. (10), e as Eqs. (16) e (17) na Eq. (13) tem-se as temperaturas transformadas,  $\bar{\tau}_i(x, s)$  e  $\bar{\eta}_i(y, s)$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i(x, s) = & A_i(s)e^{-R_i x} + B_i(s)e^{R_i x} + I_i(x) - Q_{1i}(x)(a_i(s) - c_i(s)) \\ & - Q_{2i}(x)(b_i(s) - d_i(s)), \end{aligned} \quad (18)$$

onde:

$$\begin{aligned} I_i(x) &= \frac{e^{-R_i x}}{2R_i} \int_{x_i}^x e^{R_i \xi} \frac{G_i(\xi)}{\alpha_i} d\xi - \frac{e^{R_i x}}{2R_i} \int_{x_i}^x e^{-R_i \xi} \frac{G_i(\xi)}{\alpha_i} d\xi, \\ Q_{1i}(x) &= \frac{e^{-R_i x}}{2R_i(y_2 - y_1)} (x - x_i) + \frac{\left( -e^{R_i(x-2x_i)} + e^{-R_i x} \right)}{4R_i^2(y_2 - y_1)}, \\ Q_{2i}(x) &= -\frac{e^{R_i x}}{2R_i(y_2 - y_1)} (x - x_i) + \frac{\left( e^{R_i x} - e^{-R_i(x-2x_i)} \right)}{4R_i^2(y_2 - y_1)} \end{aligned} \quad (19)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_i(y, s) = & C_i(s)e^{-R_i y} + D_i(s)e^{R_i y} + J_i(y) - P_{1i}(y)(u_i(s) - z_i(s)) \\ & - P_{2i}(y)(v_i(s) - w_i(s)), \end{aligned} \quad (20)$$

onde:

$$\begin{aligned} J_i(y) &= \frac{e^{-R_i y}}{2R_i} \int_{y_i}^y e^{R_i \xi} \frac{H_i(\xi)}{\alpha_i} d\xi - \frac{e^{R_i y}}{2R_i} \int_{y_i}^y e^{-R_i \xi} \frac{H_i(\xi)}{\alpha_i} d\xi, \\ P_{1i}(y) &= \frac{e^{-R_i y}}{2R_i(x_{i+1} - x_i)} (y - y_i) + \frac{\left( e^{-R_i y} - e^{R_i(y-2y_i)} \right)}{4R_i^2(x_{i+1} - x_i)}, \\ P_{2i}(y) &= \frac{\left( e^{R_i y} - e^{-R_i(y-2y_i)} \right)}{4R_i^2(x_{i+1} - x_i)} - \frac{e^{R_i y}}{2R_i(x_{i+1} - x_i)} (y - y_i). \end{aligned} \quad (21)$$

Nessas equações  $R_i$  está relacionado com as propriedades físicas de cada meio.

A determinação das temperaturas médias transformadas reduz-se ao cálculo dos coeficientes  $A_i(s)$ ,  $B_i(s)$ ,  $C_i(s)$ ,  $D_i(s)$ ,  $a_i(s)$ ,  $b_i(s)$ ,  $c_i(s)$ ,  $d_i(s)$ ,  $u_i(s)$ ,  $v_i(s)$ ,  $z_i(s)$  e  $w_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (12n coeficientes). Esses coeficientes são obtidos resolvendo-se um sistema de equações. Para começar a construção desse sistema fazendo uso das condições de contorno, é necessário conhecer a temperatura transformada na fronteira e interfaces. Essas são também expandidas com os elementos das respectivas bases como segue:

$$\bar{T}_i(x, y_1, s) = a'_i(s)e^{-R_i x} + b'_i(s)e^{R_i x}, \quad (22)$$

$$\bar{T}_i(x, y_2, s) = c'_i(s)e^{-R_i x} + d'_i(s)e^{R_i x} \quad (23)$$

e

$$\bar{T}_i(x_i, y, s) = u'_i(s)e^{-R_i y} + v'_i(s)e^{R_i y}, \quad (24)$$

$$\bar{T}_i(x_{i+1}, y, s) = z'_i(s)e^{-R_i y} + w'_i(s)e^{R_i y}. \quad (25)$$

Agora o número de coeficientes desconhecidos é  $20n$ . Não é difícil notar que somente com a aplicação das condições de contorno não seria possível determinar todas as constantes de forma única, pois o número de equações do sistema resultante é menor do que o número de coeficientes a calcular. De fato, substituindo  $\bar{\tau}_i$ , Eq. (18), e  $\bar{\eta}_i$ , Eq. (20) nas condições de contorno e de interfaces dos respectivos problemas são obtidas somente  $8n$  equações para o sistema. Havendo  $20n$  coeficientes a determinar,  $12n$  ( $20n - 8n$ ) equações auxiliares deverão ser determinadas para completar o sistema. Uma vez conhecidos esses coeficientes pode-se obter  $\bar{\tau}_i(x, s)$  e  $\bar{\eta}_i(y, s)$  utilizando-se as Eqs. (18) e (20).

Com o objetivo de conseguir as  $12n$  equações auxiliares, aplica-se a transformada de Laplace nas Eqs. (3) e (6), resultando em:

$$\bar{\tau}_i(x, s) = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} \bar{T}_i(x, y, s) dy \quad (26)$$

e

$$\bar{\eta}_i(y, s) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{T}_i(x, y, s) dx . \quad (27)$$

A temperatura média transformada deve satisfazer, para  $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ ,

$$\bar{\tau}_i(x_{i+1}, s) = \tilde{\bar{\tau}}_i(x_{i+1}, s), \quad (28)$$

$$\bar{\tau}_{i+1}(x_{i+1}, s) = \tilde{\bar{\tau}}_{i+1}(x_{i+1}, s)$$

isto é,  $\tilde{\bar{\tau}}_i(x, s)$  satisfaz a condição de continuidade da temperatura e do fluxo de calor nas interfaces. A notação  $\tilde{\bar{\tau}}_i$  representa  $\bar{\tau}_i$ , Eq. (26), aplicado nos pontos  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , quando usadas as expansões propostas (Eqs. (24) e (25)).

E ainda deve obedecer às seguintes igualdades:

$$\bar{\tau}_1(x_1, s) = \tilde{\bar{\tau}}_1(x_1, s), \quad (29)$$

$$\bar{\tau}_n(x_{n+1}, s) = \tilde{\bar{\tau}}_n(x_{n+1}, s).$$

Por outro lado, a temperatura média transformada  $\tilde{\bar{\eta}}_i(y, s)$  deve satisfazer, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\bar{\eta}_i(y, s) = \tilde{\bar{\eta}}_i(y, s), \quad \text{em } y_1 \quad (30)$$

$$\bar{\eta}_i(y, s) = \tilde{\bar{\eta}}_i(y, s), \quad \text{em } y_2.$$

Analogamente,  $\tilde{\bar{\eta}}_i$  denota  $\bar{\eta}_i$ , Eq. (27), quando  $y = y_1$  ou  $y = y_2$ , sendo usadas as Eqs. (22) e (23).

Com isso, são incorporadas  $4n$  equações adicionais ao sistema; assim tem-se  $8n + 4n = 12n$  equações. As  $8n$  ( $20n - 12n$ ) equações restantes são obtidas diferenciando-se duas vezes cada uma das equações acima descritas, fornecendo as  $8n$  novas equações. Portanto, o sistema formado pelas equações citadas contém as  $20n$  equações necessárias para determinar os valores numéricos dos coeficientes.

A seguir é descrita a matriz dos coeficientes associada ao sistema resultante, para o

caso de um meio composto de duas camadas, isto é,  $n = 2$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

sendo os blocos de ordem  $20 \times 20$ ,  $B_{11}$  e  $B_{22}$  são matrizes esparsas,  $(B_{12})_{i,j} \equiv 0$  exceto para  $i > j$  e  $(B_{21})_{i,j} \equiv 0$ , exceto para  $i < j$ , com  $i, j = 1, \dots, 20$ . Para  $n > 2$  não há maiores dificuldades na obtenção da matriz dos coeficientes.

Finalmente, as expressões para temperaturas médias, no domínio do tempo, são encontradas aplicando-se o método de inversão numérica da quadratura de Gauss nas soluções transformadas obtidas.

## 6. CONCLUSÃO

O método semi-analítico descrito permite o cálculo da transferência de calor bidimensional em meios multicompostos. Nesse método a equação da difusão bidimensional é integrada transversalmente nas duas variáveis espaciais gerando dois problemas unidimensionais. Por meio desse procedimento expressões em forma analítica para as temperaturas médias transformadas são encontradas sem que qualquer interpolação polinomial seja feita ao longo de seu desenvolvimento.

As soluções linearmente independentes das equações diferenciais unidimensionais homogêneas são usadas para expandir as temperaturas e os fluxos de calor transformados na fronteira. Os coeficientes desconhecidos, usados nessa expansão, são determinados resolvendo-se um sistema formado por equações, resultantes da aplicação das condições de contorno, por equações auxiliares e pela diferenciação dessas. A introdução de equações auxiliares faz-se necessário, pois somente com a aplicação das condições de contorno é formado um sistema com maior número de incógnitas do que de equações. A independência linear das soluções garante a unicidade da solução do sistema.

A idéia do método nodal combinado com a transformada de Laplace, discutidos nesse trabalho, foi aplicada por Zabadal *et al.* (1995) na resolução em forma analítica, da equação integro-diferencial de ordenadas discretas multidimensional que descreve problema de transferência radiativa em domínio retangular. Os resultados encontrados demonstraram a eficiência desse método tanto no que diz respeito ao aspecto computacional como na precisão de resultados. Tendo sido demonstrado que em problemas unidimensionais a aproximação  $S_2$  da equação de transferência radiativa é a equação da difusão, e no método nodal o problema bidimensional é transformado em problemas unidimensionais, espera-se aqui a obtenção de resultados numéricos precisos para o problema em questão.

## REFERÊNCIAS

- Antonopoulos, K. A. & Vrachopoulos, M., 1997, The adjoint-solution technique for a calculation of the thermal properties of layers in multilayer walls under transient heat conduction, *Int. J. Energy Res.*, vol. 21, n. 13, pp. 1261-1276.
- Beyer, P. O., Vielmo, H. A. & Vilhena, M. T., 1995, Estudo comparativo entre soluções para a transferência de calor em paredes multicompostas, XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Ibero-Americano de Engenharia Mecânica, Belo Horizonte.
- Beyer, P. O., 1998, Condução de calor não-estacionária em paredes externas multicom-

postas, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Carslaw, H. S. & Jaeger J. C., 1959, conduction of heat in solids, Oxford University Press, London.

Feijoo, L., Davis, H. T. & Ramkrishna, D., 1979 Heat transfer in composite solids with heat generation, J. Heat Transfer, vol. 101, n. , pp. 137-143.

Hou, S. L., Cogley, A. C. & Sharma, A., 1993, A discrete element method for composite media: one-dimensional heat-conduction, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 36, n. 12, pp. 3009-3016.

Mikhailov, M. D., Ozisik, M. N. & Vulchanov, N. L., 1983, Diffusion in composite layers with automatic solution of the eigenvalue problem, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 26, n. 8, pp. 1131-1141.

Ozisik, M. N., 1980, Heat Conduction, John Wiley, New York.

Zabadal, J. R., Vilhena, M. T. & Barichello, L. B. 1995, Analytical solution of the three dimensional discrete ordinates equation by the LTSN method, Annals of Nuclear Energy, vol. 22, n. 2, pp. 131-134.

Zedan, M. F. & Mujahid, A. M., 1993, Laplace transform solution for heat transfer in composite walls with periodic boundary conditions, J. Heat Transfer, vol. 115, n. 1, pp. 263-265.

## SOLUTION OF THE TRANSIENT HEAT CONDUCTION EQUATION IN MULTICOMPONENT PLATES

**Abstract.** In this work a semi-analytic method is presented for the solution of a two-dimensional transient heat conduction problems in a multicomponent plates. That method consists of the application of the nodal method combined with the Laplace transform technique, which allows to find expressions for the average temperatures and for the temperature in the boundary.

Keywords: semi-analytic, transient conduction, plates multicomponent